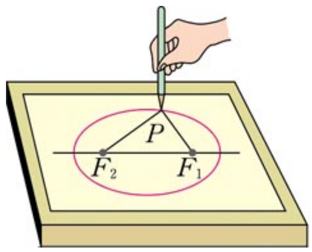
§4−2 橢圓

(甲)橢圓的定義與基本性質

一、橢圓的定義：

平面上有兩個定點 F_1、F_2，及一定長 $2a$ 且$\overline{F_1F_2}<2a$，則在平面上所有滿足$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ 的 P 點所形成的圖形稱為**橢圓**。

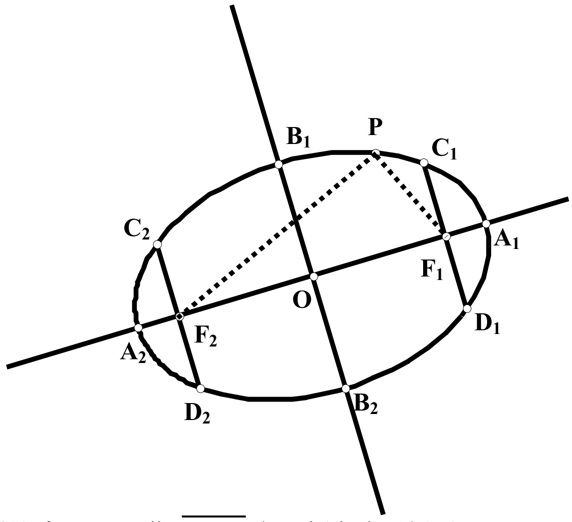
其中 F_1、F_2 稱為**焦點**。



[討論]：

若 $2a=\overline{F_1F_2}$，則 P 點會形成什麼圖形？

若 $2a<\overline{F_1F_2}$，則 P 點會形成什麼圖形？



二、橢圓的名詞介紹：

(1)兩焦點連線段的中點稱為**中心**。

(2)連接兩焦點的直線與橢圓交於 A_1、A_2 兩點，過中心 O 作$\overline{A_1A_2}$之垂線交橢圓於 B_1、B_2 兩點，A_1、A_2、B_1、B_2 稱為橢圓的**頂點**。

(3)線段$\overline{A_1A_2}$稱為**長軸**，線段$\overline{B_1B_2}$ 稱為**短軸**。

(4)橢圓上任一點與任一焦點的連線段稱為此橢圓的**焦半徑**(PF_1、PF_2)。

(e)橢圓上兩相異點的連線段，稱為此橢圓的**弦**，過焦點的弦稱為**焦弦**。

焦弦中與長軸垂直者稱為**正焦弦**($\overline{C_1D_1}$、$\overline{C_2D_2}$)

三、橢圓的基本性質：

(1)長軸兩頂點 A_1 與 A_2 對稱於 O 點，短軸兩頂點 B_1 與 B_2 對稱於 O 點。

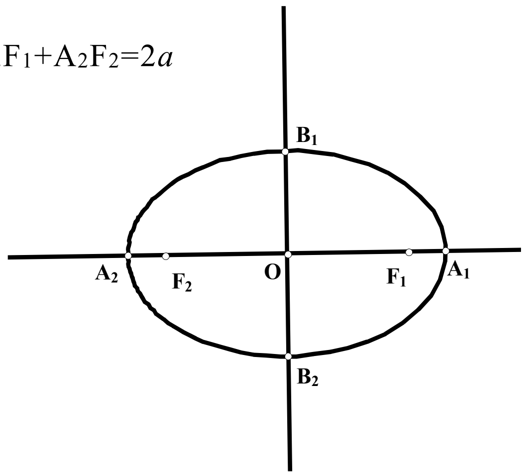
[說明]：

因為 A_1、A_2 在橢圓上，所以 $A_1F_1+A_1F_2=2a$，$A_2F_1+A_2F_2=2a$

$\Rightarrow A_1F_1++A_1F_2=A_2F_1+A_2F_2=2a$

$\Rightarrow 2A_1F_1+F_1F_2=2A_2F_2+F_1F_2\Rightarrow A_1F_1= A_2F_2$

因為 $OF_1=OF_2 \Rightarrow OA_1=OA_2$



$\Rightarrow A_1A_2=A_1F_1+F_1A_2=A_1F_1+A_1F_2=2a$

故長軸兩頂點 A_1 與 A_2 對稱於 O 點。

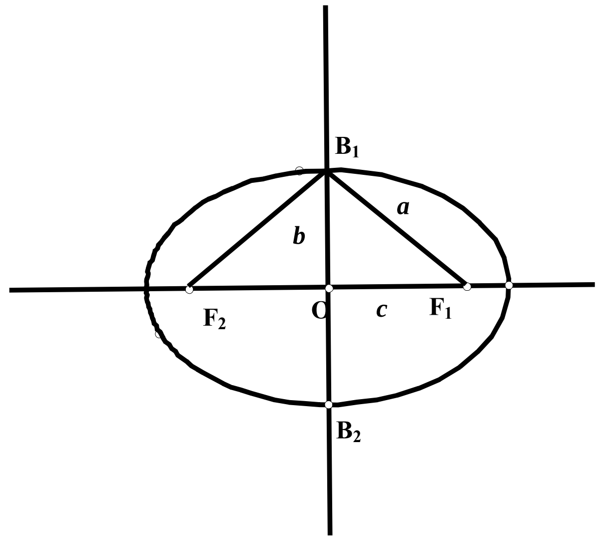
另外因為 B_1、B_2 在長軸的中垂線上，且 $\overline{B_1A_1}=\overline{B_1A_2}=\overline{B_2A_1}=\overline{B_2A_2}$，
故 B_1、B_2 對稱於長軸，所以 $OB_1=OB_2$。

故短軸兩頂點 B_1 與 B_2 對稱於 O 點。

令 $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=a$，$\overline{OB_1}=\overline{OB_2}=b$，根據前面的討論，
故長軸長=$2a$，短軸長=$2b$，a 稱為長軸半長，b 稱為短軸半長。

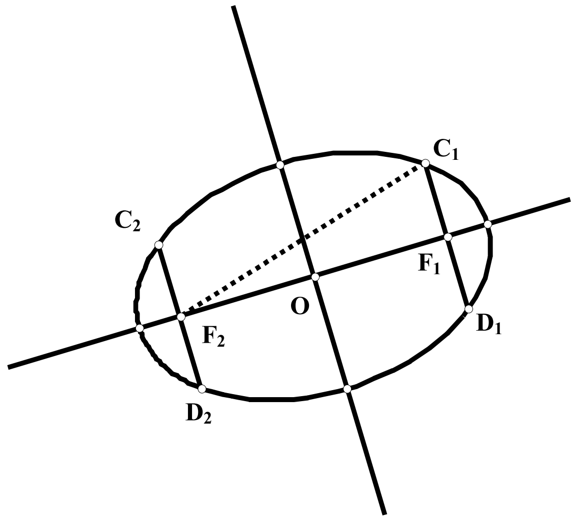
(2)若令 $\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=c$，則 $a^2=b^2+c^2$。

[說明]：
因為 B_1 在橢圓上，所以 $B_1F_1+B_1F_1=2a$，
又 $B_1F_1=B_1F_2=a$(ΔB_1OF_1 與 ΔB_1OF_2 相似)，
由直角三角形 B_1OF_1，
可得 $B_1F_1^2=OB_1^2+OF_1^2 \Rightarrow a^2=b^2+c^2$



(3)橢圓的正焦弦長=$\dfrac{(\text{短軸長}2b)^2}{\text{長軸長}2a}=\dfrac{2b^2}{a}$。
(a 為長軸半長、b 為短軸半長)

[說明]：
令 $C_1F_1=x$，則正焦弦長 $C_1D_1=2x$
因為 C_1 在橢圓上，所以 $C_1F_2=2a-x$
$\Rightarrow x^2+(2c)^2=(2a-x)^2$
$\Rightarrow x=\dfrac{a^2-c^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}$
$\Rightarrow$正焦弦長 $C_1D_1=\dfrac{2b^2}{a}$。



結論：

(1)a,b,c 的意義如下：

a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

$c=\frac{1}{2}\cdot\overline{F_1F_2}$=中心到焦點之距離。

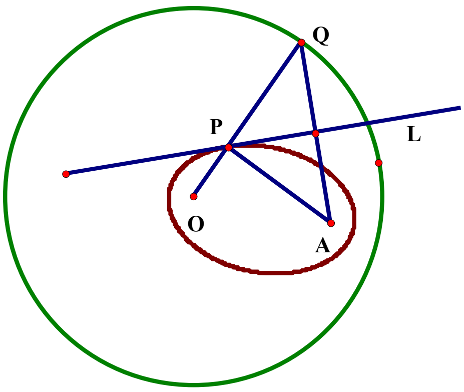
(2)a,b,c 的關係：$a^2=b^2+c^2$

(3) 橢圓的正焦弦長=$\frac{(\text{短軸長}2b)^2}{\text{長軸長}2a}=\frac{2b^2}{a}$。

(a 為長軸半長、b 為短軸半長)

四、橢圓的作圖：

已知一圓 O 與圓內部一點 A



step1：在圓上任取一點 Q　　step2：作$\overline{AQ}$的中垂線 L

step3：作 L 與直線 OQ 的交點 P，

　　則 P 為以 O、A 為焦點的橢圓上的點。

驗證：

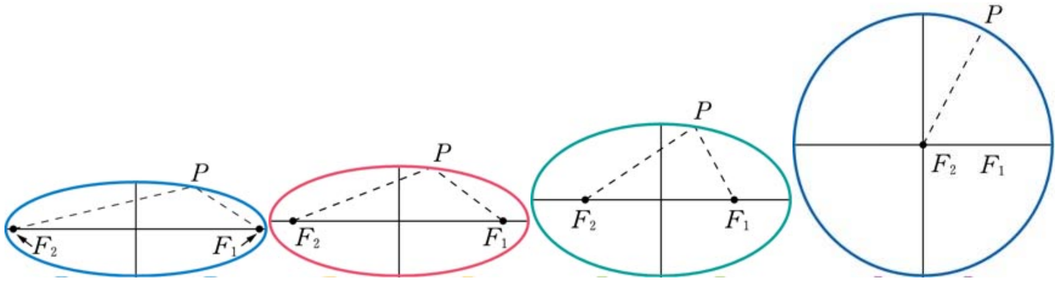
五、橢圓形狀的變化：

橢圓形狀（較扁或較圓）與比值$\frac{\overline{F_1F_2}}{\text{繩長}(2a)}$的大小有關。

令 $2c=\overline{F_1F_2}$，$2a$＝繩長，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$　($0<e<1$)，

則 e 愈大，形狀愈扁；e 愈小，形狀愈圓，如下圖所示。

(下圖中，繩長 $2a$ 固定，而$\overline{F_1F_2}$由大而小逐漸改變)



$e=0.82$　$e=0.73$　$e=0.64$　$e=0$

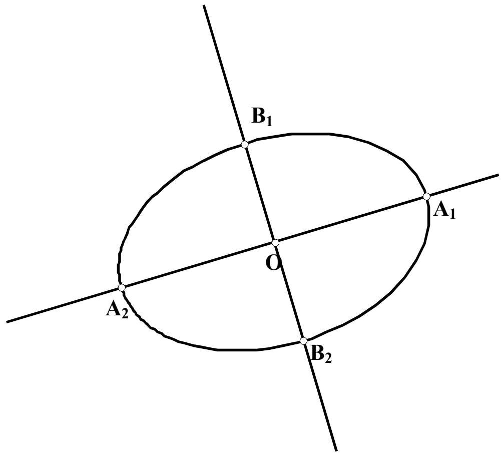
(a)　(b)　(c)　(d)

$e=\frac{c}{a}$ 稱為橢圓的離心率。

[例題1] 橢圓基本性質

(1)一橢圓形撞球台，其長軸長為 10，且其兩焦點 F_1、F_2，今有一人從 F_1 將一球依直線方向打至邊上一點 A，反彈過 F_2，撞至邊上另一點 B，再回到原焦點處 F_1，試求 ΔABF_1 的周長。 Ans：20

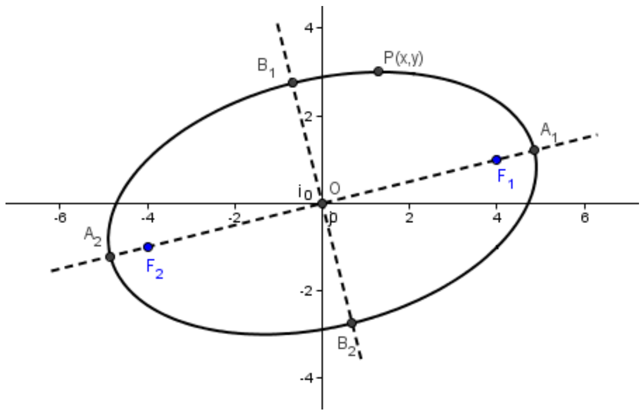
(2) 如右圖，已知橢圓的長軸與短軸的頂點，試利用尺規找出焦點的位置。



[例題2] 橢圓方程式：$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=10$，

求(1)焦點(2)中心(3)長軸頂點(4)長軸長(5)短軸長(6)正焦弦長

Ans：(1)(4,1)(−4,−1)(2)(0,0) (3)$(\frac{20}{\sqrt{17}},\frac{5}{\sqrt{17}})$ $(-\frac{20}{\sqrt{17}},-\frac{5}{\sqrt{17}})$ (4)10(5)$2\sqrt{2}$ (6)$\frac{16}{5}$



(練習1) 假設一個橢圓的長軸長與短軸長之比為 2：1，求此橢圓的短軸長與正焦弦長的比。
Ans：2：1

(練習2) 已知平面上一橢圓的兩焦點為(6,0)及(0,8)，長軸長為 20，則下列那些敘述是正確的？(A)(3,4)為橢圓的中心 (B)短軸的斜率為$\frac{3}{4}$ (C)(9,−4)為長軸上一個頂點 (D)橢圓與正 x 軸只有一個交點。 Ans：全

(練習3) 設橢圓Γ的兩焦點 F_1、F_2，長軸長為 $2a$，平面上除了橢圓Γ之外，其餘的點可分成兩個部分，包含焦點 F_1、F_2 的部分，稱為橢圓內部，不包含焦點 F_1、F_2 的部分，稱為橢圓外部。試利用橢圓的定義證明：

(1)若 R 點為橢圓Γ內部的點，則$\overline{RF_1}+\overline{RF_2}<2a$。

(2)若 R 點為橢圓Γ外部的點，則$\overline{RF_1}+\overline{RF_2}>2a$。

(乙)橢圓的標準式

一、橢圓的標準式：

例題 2 中，橢圓的長短軸都沒有與 x,y 軸平行，它的方程式若化成一般型式，相當複雜而且無法看出橢圓的特徵，當我們選取長軸、短軸使得它們平行座標軸時，橢圓的方程式就會變得比較簡單，這樣的方程式稱為**標準式**。

(1)中心(0,0)的標準式：

> (a)給定兩個定點 **$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，橢圓$\Gamma=\{P|\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a\}$**
> **的方程式為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。($a^2=b^2+c^2$)**

[證明]：

(⇒)(證明滿足$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ 的點 $P(x,y)$都是方程式的解)

設 $P(x,y)$滿足$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，則

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ 移項變成$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 兩端平方

$\Rightarrow(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

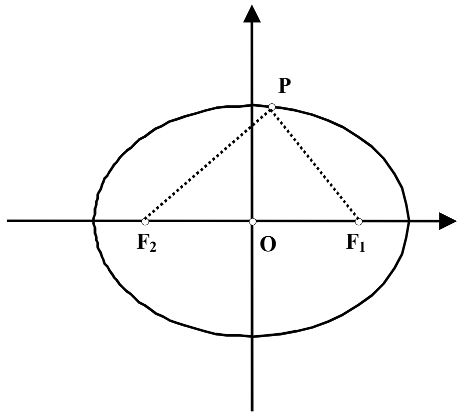
$\Rightarrow a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$，兩端平方，再化簡可得

$\Rightarrow(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(⇐)(證明方程式的解 $P(x,y)$都滿足 $PF_1+PF_2=2a$)

設點 $P(x,y)$滿足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，則



$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x^2-2cx+c^2)+b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$

$=\sqrt{(\frac{a^2-b^2}{a^2})x^2-2cx+(b^2+c^2)}$

$=\sqrt{(\frac{c}{a}x)^2-2cx+a^2} =\sqrt{(a-\frac{c}{a}x)^2} =|a-\frac{c}{a}x|$

$(\because b=\sqrt{a^2-c^2})$

同理可得 $\overline{PF_2}=|a+\frac{c}{a}x|$

由於點 $P(x,y)$滿足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，所以$\frac{x^2}{a^2}\le 1 \Rightarrow -a\le x\le a$，$-c\le\frac{c}{a}\cdot x\le c$

$\Rightarrow a-c\le a-\frac{c}{a}x\le a+c$ ，$a-c\le a+\frac{c}{a}x\le a+c$

橢圓兩焦半徑： $\boldsymbol{\overline{PF_1} = a-\frac{c}{a}x}$ **且** $\boldsymbol{\overline{PF_2} =a+\frac{c}{a}x}$

於是 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=|a-\frac{c}{a}x|+|a+\frac{c}{a}x|=(a-\frac{c}{a}x)+(a+\frac{c}{a}x)=2a$。

根據焦半徑的公式：**焦半徑的最大值=$\boldsymbol{a+c}$，最小值=$\boldsymbol{a-c}$。**

結論：橢圓方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1)中心(0,0)

(2)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

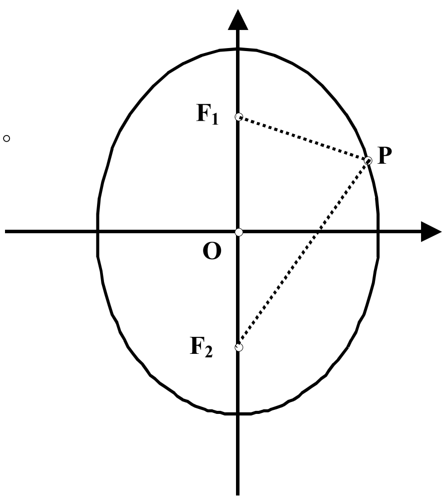
b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(b)若選取 $\boldsymbol{F_1(0,c)}$、$\boldsymbol{F_2(0,-c)}$，橢圓$\boldsymbol{\Gamma=\{P|\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a}$，$\boldsymbol{\overline{F_1F_2}<2a\}}$ 的方程式為$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$。$\boldsymbol{(a^2=b^2+c^2)}$

結論：橢圓方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1)中心(0,0)

(2)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。



b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(練習4) 求橢圓方程式$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長。

Ans：(0,0)、$(\pm\sqrt{7},0)$、(±4,0)、(0,±3)、$\dfrac{9}{2}$

(練習5) 求橢圓$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{7}=1$ 的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長。

Ans：(0,0)、 $(0,\pm\sqrt{3})$、$(0,\pm\sqrt{7})$、(±2,0)、$\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

(2)中心(h,k)的標準式

例子：

設橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 平移一個向量$\vec{l}$=(5,4)後得另一個橢圓Γ$'$，

試求Γ$'$的方程式及中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長、長軸長、短軸長。

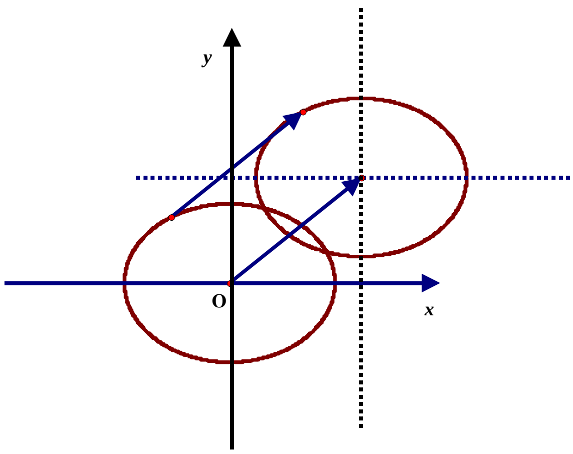
[解答]：

設點 $P'(x',y')$為橢圓Γ$'$的任意點，則$\overrightarrow{PP'}=\vec{l}$=(5,4)，其中 $P(x,y)$為橢圓Γ上的點。

$\Rightarrow x'-x=5$，$y'-y=4 \Rightarrow x=x'-5$ 且 $y=y'-4$

因為 $P(x,y)$為橢圓Γ上的點

$\Rightarrow \dfrac{(x'-5)^2}{16}+\dfrac{(y'-4)^2}{9}=1$



所以Γ$'$的方程式為$\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1$。

$\Rightarrow a^2=16$，$b^2=9$，$c^2=16-9=7 \Rightarrow a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{7}$

即中心到長軸頂點、短軸頂點、焦點的距離分別是 4，3，$\sqrt{7}$

Γ$'$的中心為(5,4)、焦點$(5\pm\sqrt{7}\ ,4)$、長軸頂點(5±4,4)、短軸頂點(5,4±3)、

正焦弦長=$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$，長軸長=8，短軸長=6。

Γ的中心(0,0)、焦點$(\pm\sqrt{7},0)$、長軸頂點(±4,0)、短軸頂點(0,±3)、

正焦弦長=$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$，長軸長=8，短軸長=6

比較Γ、Γ$'$的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長、長軸長、短軸長，可以得知，點坐標會平移而長度部分不變。

結論：

(1)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{沿}\vec{l}=(h,k)\text{平移}} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(2) $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \xrightarrow{\text{沿}\vec{l}=(h,k)\text{平移}} \dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

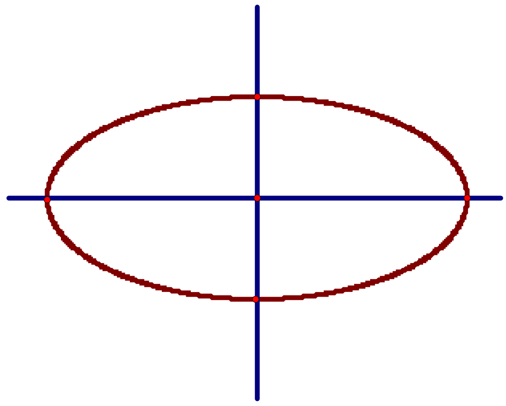
橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

[例題3] 試求橢圓 $x^2+9y^2+8x+54y+61=0$ 的(1)中心坐標(2)焦點坐標(3)頂點坐標(4)長軸的長(5)短軸的長(6)正焦弦長。Ans：(1)$(-4,-3)$ (2)$(-4+4\sqrt{2},-3)$、$(-4-4\sqrt{2},-3)$ (3)$(2,-3)(-10,-3)(-4,-1)(-4,-5)$(4)12(5)4(6)$\dfrac{4}{3}$



[例題4] 試求滿足下列諸條件的橢圓方程式：

(1) 中心為$(-3,2)$，長軸半長為 2，短軸半長為 1，且長軸平行於 x 軸。

(2) 兩焦點為$(-3,-1)$與$(-3,1)$，橢圓上點到兩焦點的距離和 10

(3) 中心在原點，軸為座標軸，且過$(2,3)$、$(-1,4)$。

(4)長軸在 $x=5$ 上，短軸在 $y=1$ 上，短軸長是長軸長的$\frac{3}{5}$倍，中心到焦點的距離為 12。

Ans：(1)$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$ (2)$\frac{(x+3)^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$ (3) $\frac{7x^2}{55}+\frac{3y^2}{55}=1(4)\frac{(x-5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{225}=1$

[例題5] 已知橢圓Γ_1為 $\frac{x^2}{k^2+1}+\frac{y^2}{7-k}=1$，試求

(1)若Γ_1的焦點在 x 軸上，則 k 的範圍為何？

(2)Γ_1與橢圓$\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{24}=1$ 共焦點，則 k 的值為何？

Ans：(1)$k<-3$ 或 $2<k<7$　(2)-9

(練習6) 求滿足下列條件的橢圓方程式：

(1)中心在(2,2)，其軸平行於坐標軸，長軸為短軸的 3 倍，並通過(4,0)，

(2)已知兩焦點為(3,6)與(3,-2)，短軸長為 6

(3) 已知兩焦點$(0,2\sqrt{3})$，$(0,-2\sqrt{3})$，且過點$(\sqrt{3},2)$，求此橢圓方程式。

(4) 有一焦點坐標為 F(-3，2)，短軸一端點為 B(1，-1)，長軸平行 x 軸。

(5) 中心在(1，2)，長軸平行 x 軸，長軸長為短軸長的 3 倍，且過(4，3)。

Ans：(1)$\frac{(x-2)^2}{40}+\frac{9(y-2)^2}{40}=1$ 或$\frac{9(x-2)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{40}=1(2)\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

(3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ (4) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ (5) $\frac{(x-1)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

(練習7) 設點 P 為橢圓 $2x^2+y^2-4x+4y+2=0$ 上任一點，F_1 與 F_2 為其二焦點，則$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$=__________。Ans：4

(練習8) 坐標平面上，若$\frac{x^2}{15-k}+\frac{y^2}{24-k}=1$表示一個橢圓，求此橢圓的兩焦點坐標。 Ans：$(0,\pm 3)$

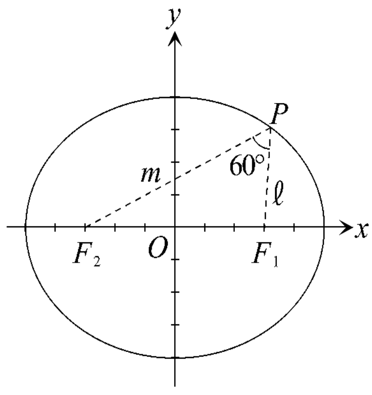
(練習9) 某行星繞一恆星之軌道為橢圓，且恆星在其一焦點處。據觀察得知此行星與恆星的最近距離為 100 萬公里，最遠是 300 萬公里，則此橢圓的正焦弦長為______萬公里。Ans：300

(練習10) 橢圓兩焦點 $F_1(0,6)$、$F_2(0，-6)$，弦$\overline{AB}$過 F_1，ΔABF_2的周長為 40，請求出此橢圓的方程式為何？Ans：$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

(練習11) 求過點(3,2)，且與$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$共焦點的橢圓方程式。Ans：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

(練習12) 設$\frac{(x+1)^2}{t+1}+\frac{(y+1)^2}{3-t}=1$表長軸在直線 $y+1=0$ 上之橢圓，則 t 之範圍為何？Ans：$1<t<3$

[例題6] 設 P 為橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一點，$F_1, F_2$為二焦點，若 $\angle F_1PF_2=60°$，求$\triangle PF_1F_2$的面積。 Ans：$\frac{16\sqrt{3}}{3}$



(練習13) 設點 P 為橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一點，$F_1, F_2$為其兩焦點，若 $\angle F_1PF_2=30°$，求$\triangle PF_1F_2$的面積。

Ans：$16(2-\sqrt{3})$

[例題7] (圓與橢圓的關係)

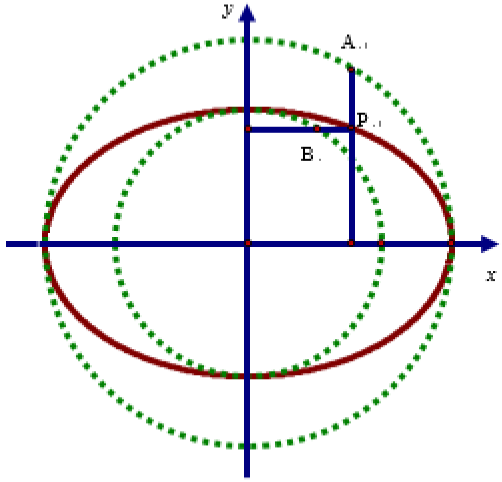
如圖，設橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、圓 C_1：$x^2+y^2=a^2$、圓 C_2：$x^2+y^2=b^2$ (其中 a,b 均為正數)，設 $A(x,\sqrt{a^2-x^2}\,)$、$B(\sqrt{b^2-y^2}\,,y)$

(1)試求 P 點的座標。

(2)請利用水平或鉛直伸縮，使得 A 點變換到 P 點。

(3)請利用水平或鉛直伸縮，使得 B 點變換到 P 點。

(4)試利用水平或鉛直伸縮，將Γ變換到 C_1 與 C_2。



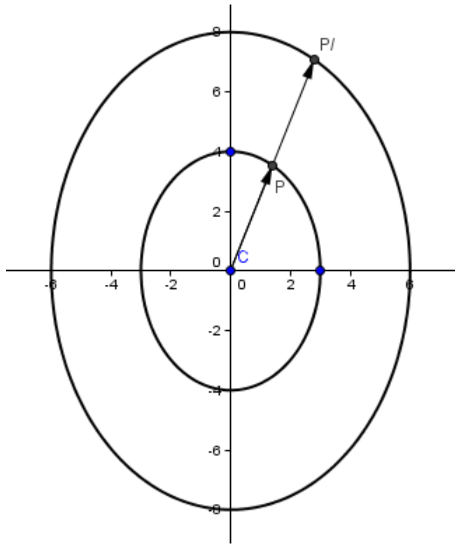
Anss：(1)$P(x,\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,)$或 $P(\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,,y)$

(2)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{b}{a}\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}\dfrac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(4)利用$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{b}{a}\end{bmatrix}$$\Gamma$變換到 C_1 利用$\begin{bmatrix}\dfrac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$\Gamma$變換到 C_2

[例題8] 將橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$中心伸縮 2 倍，所得的橢圓方程式為何？

Ans：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$



(練習14)一個圓 $x^2+y^2=1$ 上的點 $P(x,y)$先沿水平方向伸長 3 倍，再沿 y 軸方向伸長 2 倍。得到另一個點 $Q(x',y')$，

(a)請找出一個 2 階方陣 A 使得 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。

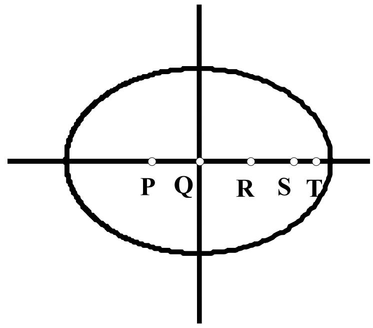
(b)Q 點形成另一個圖形，請問此圖形的方程式。Ans：$\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(練習15)將橢圓$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$伸縮$\frac{1}{3}$倍，所得的橢圓方程式為何?Ans：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

綜合練習

(1) 關於橢圓Γ：$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=6$，則下列何者為真?
(A)(0 , 0)是Γ的中心 (B)(1 , 2),(−1 ,−2)為Γ的焦點(C)Γ的短軸長為 4(D)Γ對稱於直線 $x=y$(E)Γ 對稱於(1 , 2)與(−1 ,−2)的連線。

(2) 右圖是一個橢圓，試問下列那一個點是此橢圓的焦點？
(A)P (B)Q (C)R(D)S (E)T



(3) 坐標平面上有一個橢圓，已知在(8,4), (9,11), (15,5)和(16,12)這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的半長軸長度=？

(4) 設一橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ，其中 $a>0$，$b>0$，
設 F 為其一焦點，已知橢圓在 x 軸上的兩個頂點分別與 F 的距離為 5 單位與 1 單位，試求(a,b)=？ (91 指定乙)

(5) 令橢圓Γ_1：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$、$\Gamma_2$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=2$、$\Gamma_3$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=\frac{2x}{5}$的長軸分別為 l_1、l_2、l_3。請問下列哪一個選項是正確的？(2010 學科能力測驗)
(1)$l_1=l_2=l_3$ (2)$l_1=l_2<l_3$ (3)$l_1<l_2<l_3$ (4)$l_1=l_3<l_2$ (5)$l_1<l_3<l_2$。

(6) 設 E_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(其中 $a>0$)為焦點在(3,0),(−3,0)的橢圓；E_2：焦點在(3,0)且準線為 $x=-3$ 的拋物線。已知 E_1、E_2 的交點在直線 $x=3$ 上，則 a=_______。(2011 學科能力測驗)

(7) 設坐標平面上有 A、B、C 三點，若 A(5,0)、B(−5,0)，線段$\overline{AC}$的長為 $3\sqrt{10}$ ，線段$\overline{BC}$的長為$\sqrt{10}$ 。求以 A、B 為焦點，且通過 C 的橢圓標準式。

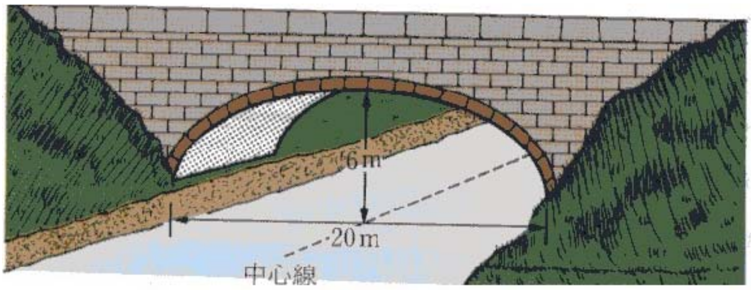
(8) 設 a 為實數，方程式$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}=2a$，則
(a)方程式表示橢圓，試求 a 之範圍。(b)方程式表示線段，試求 a 之範圍。

(9) 已知方程式 $x^2+4y^2+2x+4y+k=0$ 之圖形為一個橢圓，試求實數 k 的取值範圍？

(10) 設一橢圓長軸長 16，短軸長 10，求此橢圓最長的焦半徑與最短的焦半徑。

(11) 設點 P 在橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 且 P 與兩焦點的連線互相垂直，已知點 P 在第一象限內，求 P 的座標。

(12) 下圖是一座設計成半橢圓的拱橋，河寬 20 公尺，河寬之中心線的水面處拱高 6 公尺，問距離河寬中心線 5 公尺處的拱高為多少公尺？



(13) 橢圓$\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10$ 的短軸長為_________。

(14) 一橢圓形撞球台，外圍的方程式為$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，且其兩焦點 F_1、F_2，今有一人從 F_1 將一球依直線方向打至邊上一點 A，反彈過 F_2，撞至邊上另一點 B，再回到原焦點處 F_1，試求ΔABF_1的周長。

(15) 已知 F 是橢圓一焦點，B_1、B_2 是短軸的頂點，且 $B_1FB_2=90°$，A_1 是長軸上距離 F 較近的一個端點，

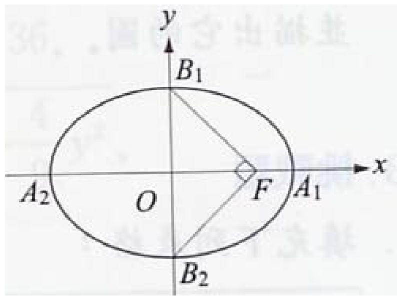
若$\overline{A_1F}=\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求橢圓的方程式。

(16) 設 Γ：$\dfrac{x^2}{9-k}+\dfrac{y^2}{k-4}=1$ $(k\in R)$，

(a)若 Γ 表一橢圓，求 k 的範圍。

(b)若 Γ 表一焦點在 x 軸的橢圓，求 k 的範圍。

(c)若 Γ 表一焦點在 y 軸的橢圓，求 k 的範圍。



(17) 設二定點 $F(5,\ 2)$，$F'(-1,\ 2)$，以 F'為中心，10 單位長為半徑畫圓，令 K 為此圓上的動點，P 為$\overline{KF}$ 中垂線與直線$\overleftrightarrow{KF'}$的交點，則 K 在圓上轉一周時，P 點的軌跡方程式為____________。

(18) 設 P 為橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的一點且位在上半平面。

若 F_1，F_2 為 Γ 之焦點，且$\angle F_1PF_2$ 為直角，則 P 點的 y 坐標為______。

（化成最簡分數）

進階問題

(19) 設橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$有一點 P 滿足 PF：PF$^{/}$=5：11，則 P 點坐標為何？

(20) 求$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$一點 P 與兩焦點 F, F'夾角為 60 度，求△ PFF'之面積。

(21) 橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的內部在第一象限所形成的$\dfrac{1}{4}$橢圓區域，直線 $y=mx$ 平分該區域，試求 m 的值。

(22) 橢圓 $4x^2+9y^2+8x-32=0$ 內以$(0, 1)$為中點之弦所在直線方程式為________。

綜合練習解答

(1)(A)(B)(C)(E)

(2)(D)

(3)$\sqrt{50}$

(4)$(a,b)=(3$，$\sqrt{5}$ $)$

(5)(4)

(6)$3+3\sqrt{2}$

(7)$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

(8)(a)$a>\frac{5}{2}$ (b)$a=\frac{5}{2}$

(9)$k<2$

(10)$8+\sqrt{39}$，$8-\sqrt{39}$

(11)$(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}})$

(12)$3\sqrt{3}$ 公尺

(13)6

(14)20

(15)$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

(16) (a) $4<k<9$ 且 $k\neq\frac{13}{2}$(b) $4<k<\frac{13}{2}$(c)$\frac{13}{2}<k<9$

(17) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

(18)$\frac{9}{4}$

(19)$(\pm2,\pm\frac{\sqrt{21}}{2})$

(20)$6\sqrt{3}$

(21)$m=\frac{b}{a}$ [提示：將橢圓經由鉛直伸縮變換$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{a}{b}\end{bmatrix}$成 $x^2+y^2=a^2$，而 $y=x$ 會平分在第一象限的$\frac{1}{4}$圓區域，因此 $y=mx$ 經由鉛直伸縮變換$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{a}{b}\end{bmatrix}$成 $y=x$。]

(22)$4x+9y-9=0$