第四章二次曲線

§4−1 拋物線

(甲)圓錐曲線發展的簡史

圓錐曲線的研究，早在古希臘時代就有人為了「**倍立方問題**」引出了圓錐曲線的概念。到了西元前 400 年左右，Menaechmus 以幾何方法來探索「倍立方問題」，他利用頂角分別為直角、銳角、鈍角等三種不同的直圓錐面。與垂直於錐面的母線的平面截出了拋物線、橢圓與雙曲線等三種曲線(註：雙曲線只有一支)。Menaechmus 為了將拋物線的概念與「倍立方問題」結合在一起，他曾推得一個拋物線的關係，以現代解析幾何的表達，就是 $y^2=cx$ 的形式，其中 c 是頂點到截平面的距離有關的常數，同樣，對橢圓與雙曲線也作了」深入的探討。

Menaechmus 之後，希臘數學家持續地有系統的研究，其中 Euclid(330~275B.C.)、Archimedes(287~212B.C.)、Appllonius 等人都有很多的著作。Archimedes 曾利用「**窮竭法**」計算出拋物線與直線圍成的弧形區域面積，並求得橢圓的面積，而 Appllonius 更完成了八卷有關圓錐曲線(Conic Section)的著作，而圓錐曲線純幾何的研究，到了 Appllonius 的時代，可說達到了顛峰。

在 Appllonius 的著作中，他利用一個圓錐面與不同斜度的截平面截出了橢圓、拋物線與雙曲線，而且也確定了雙曲線是兩支曲線的概念，三種曲線的命名最早也是由他提出來的。在八卷著作中，Appllonius 對切線與平行弦的中點軌跡都有詳細的介紹，他也得到橢圓和雙曲線的焦半徑性質：「橢圓上任一點到兩焦點的距離和為一定值」、「雙曲線上的點到兩焦點的距離差的絕對值是一個定值」。Appllonius 更進一步探索了橢圓與雙曲線的光學性質，但對於圓錐曲線的焦點、準線與離心率的研究，卻在 Appllonius 後約西元三世紀左右，由幾何學家 Pappus 提出來的。圓錐曲線的綜合幾何法研究，到此時已經相當完備了。

直到十六、七世紀後，由於解析幾何的引入，以及實際問題的需要，圓錐曲線的研究，在燃起新的熱潮，利用軌跡的概念，重新探索圓錐曲線與錐線的性質。如 1579 年，蒙特將橢圓定義為：平面上到兩定點的距離和為一定值的點的軌跡。1604 年 Keppler 提出了連續變動的理論：他從一雙曲線開始，設它的兩焦點 F_1 與 F_2 在直線 l 上，且 F_1 固定不動，F_2 沿著直線 l 逐步的向遠方移動，這時候雙曲線的一支也隨著 F_2 的移動向遠處移動，當 F_2 移至無窮遠的地方，F_2 及一支曲線就消失了，這時候雙曲線只剩下一支，而開口也變小了，它變成了拋物線。當 F_2 從 F_1 的左側移到無窮遠處，而從 F_1 的右側又逐步的向 F_1 移動時，拋物線又變成了橢圓，又當 F_2 移到 F_1 的位置時，橢圓就變成圓的圖形。因此就 Keppler 的想法而言，圓錐曲線是一體的。事實上，Keppler 所提出的大膽想法，從圓錐與平面的截痕的觀點是可以理解的。

從 Keppler 提出的連續變動理論及無窮遠點的概念之後，法國的射影幾何學家 Desargues、Blaise Pascal、Hire 也相繼的利用射影幾何學的觀點，對圓錐曲線作更進一步的研究。

當笛卡兒與費馬建立了解析幾何的概念與方法之後，他們也發現圓、橢圓、雙曲線和拋物線，它們的方程式都是二次式，但是利用解析幾何系統性的研究圓錐曲線是 1655 年後，英國數學家 Wallis 導出圓錐曲線的方程式之後，才利用方程式的方法證明圓錐曲線的各種性質。

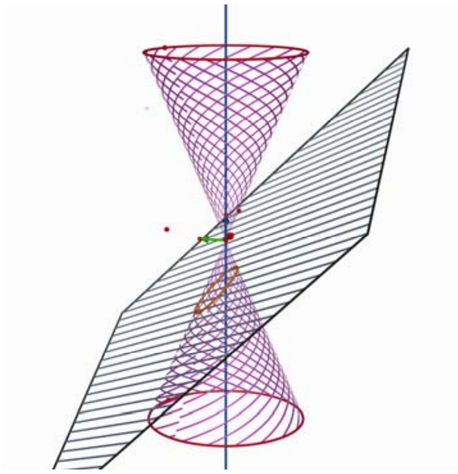
(乙)圓錐截痕

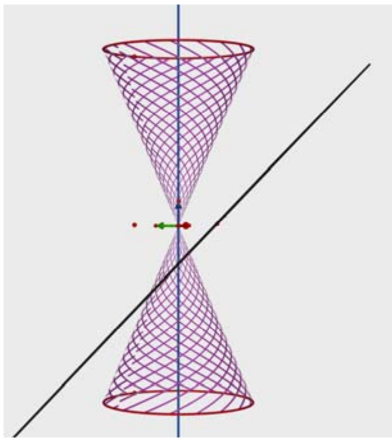
設 L_0 與 L 是相交於 V 點的兩條直線，讓 L 以 L_0 為軸旋轉，所得的曲面就是一個直圓錐面Ω，

(Ⅰ)非退化的圓錐曲線：

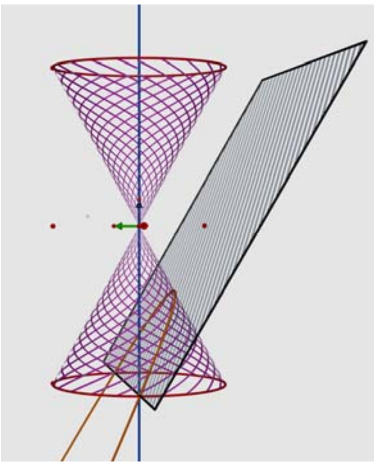
若用不過 O 點的平面 E 去切割Ω，所得的曲線稱為圓錐曲線。設 L_0 和 L 的夾角為α，割平面和軸線 L_1 的夾角為β，

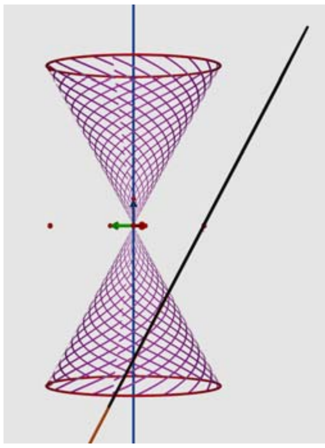
(a)當$\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha$時，截痕曲線稱為**橢圓**；($\beta=\frac{\pi}{2}$時，截痕曲線稱為**圓**)



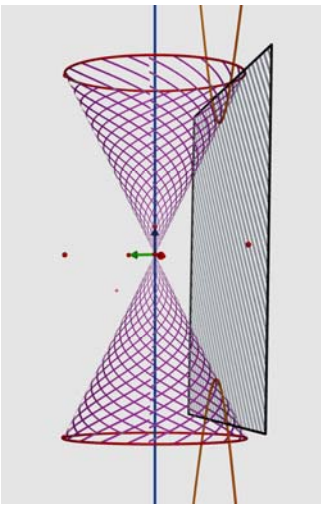


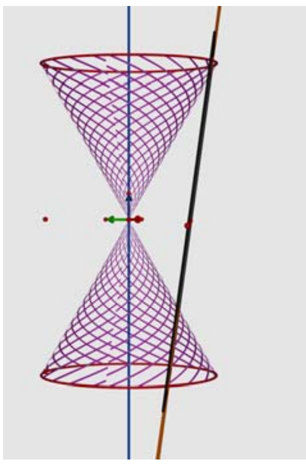
(b)當$\beta=\alpha$時，截痕曲線稱為**拋物線**



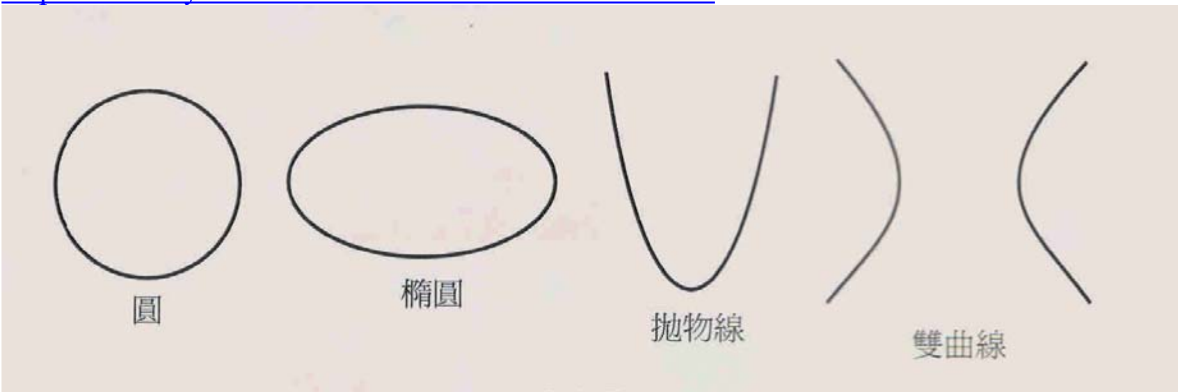


(c)當 $0\le\beta<\alpha$時，截痕曲線稱為**雙曲線**



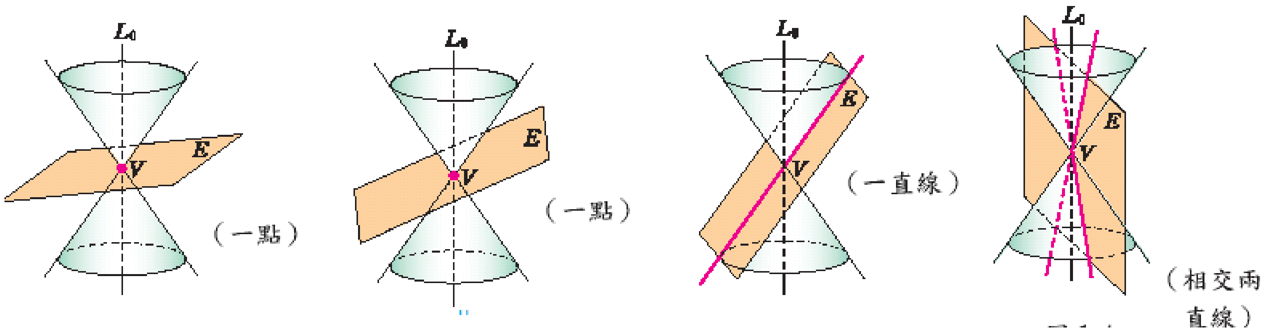


結合上面所述的截痕，可得以下幾個圖形：
https://www.youtube.com/watch?v=bzXGIBIdasM



(Ⅱ)**退化的圓錐曲線**：

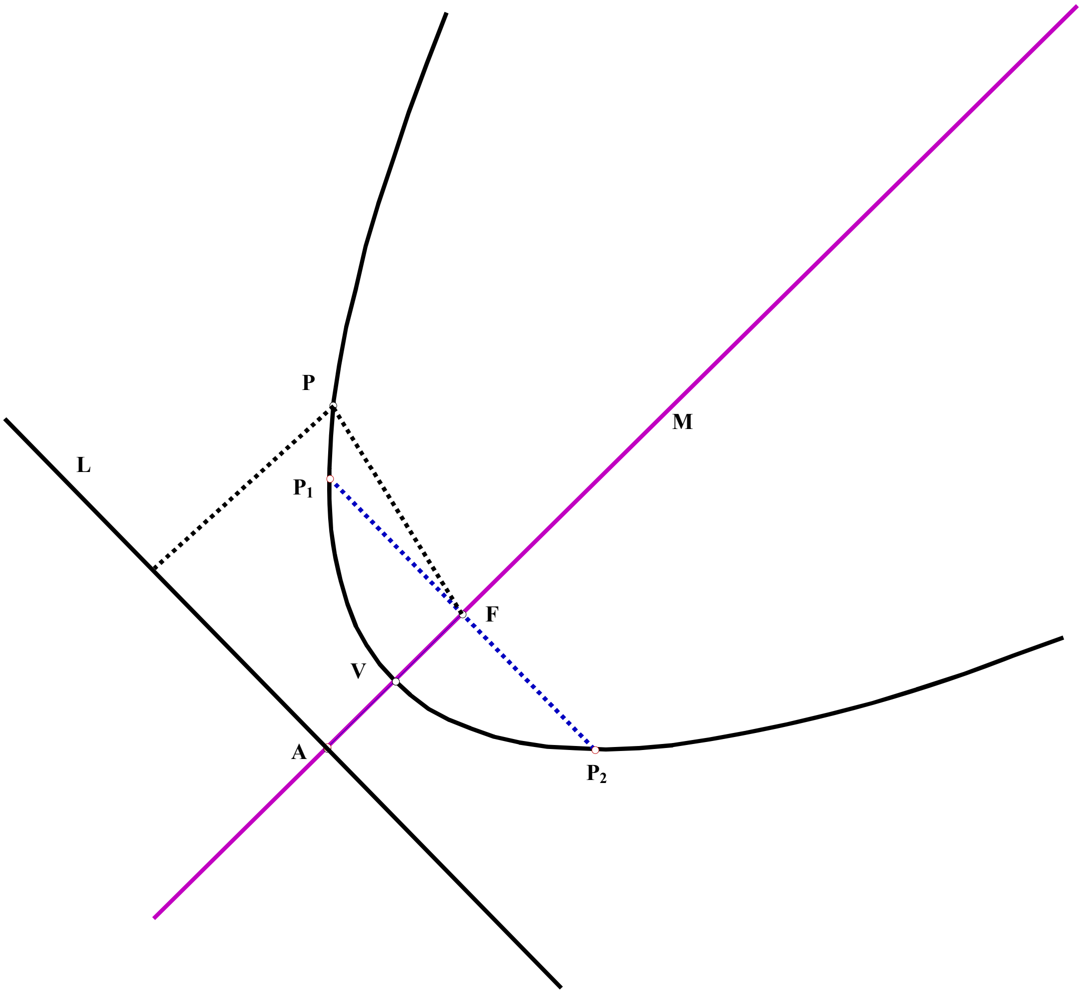
若用過頂點 V 的平面去切割Ω，可得退化的圓錐曲線，此時的截痕分別為一點、一條直線、兩條相交直線



(丙)拋物線的定義與基本性質

一、拋物線的定義：

設平面上的直線 L、定點 F，其中 **F 不在 L 上**，則平面上到直線 L 的距離等於到定點 F 的所有動點 P 形成的圖形稱為**拋物線**。



二、拋物線的名詞介紹：

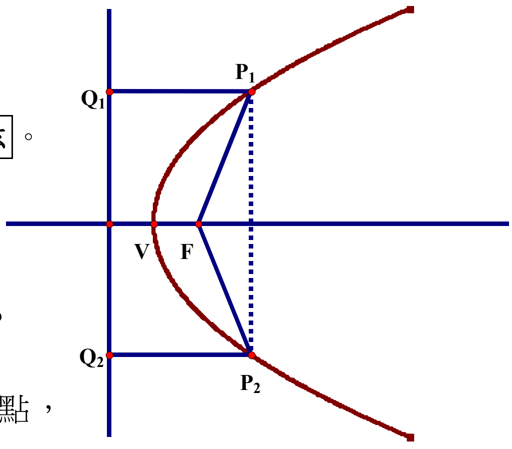
(1)直線 L 稱為$\boxed{\textbf{準線}}$，F 點稱為$\boxed{\textbf{焦點}}$。

(2)過焦點垂直準線的直線 M 稱為$\boxed{\textbf{對稱軸}}$(簡稱)$\boxed{\textbf{軸}}$

(3)對稱軸與拋物線的交點 V 稱為$\boxed{\textbf{頂點}}$，VF 稱為$\boxed{\textbf{焦距}}$。

(4)拋物線上兩點的連線段稱為$\boxed{\textbf{弦}}$，過焦點的弦稱為$\boxed{\textbf{焦弦}}$。

垂直對稱軸的焦弦$\overline{\mathbf{P_1P_2}}$稱為$\boxed{\textbf{正焦弦}}$。



[討論]：

如何說明過焦點垂直準線的直線 M 為拋物線的對稱軸？

[說明]：

設 P_1 是拋物線上的點($P_1 \neq V$)，P_2 是 P_1 對直線 M 的對稱點，P_1、P_2 分別對準線 L 作垂線，垂足分別為 Q_1、Q_2

因為$\overline{P_1F}=\overline{P_2F}$且$\overline{P_1F}=\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}$,故$\overline{P_2F}=\overline{P_2Q_2}$，因此 P_2 在拋物線上。

三、拋物線的基本性質：

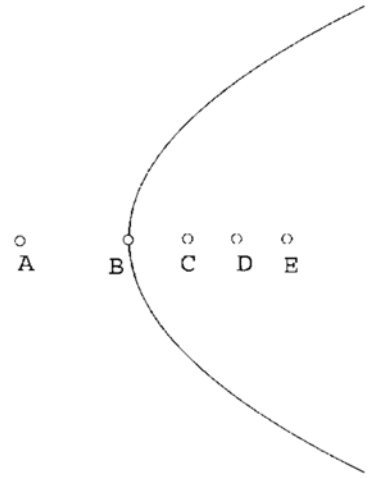
(1)設對稱軸與準線的交點為 A，則頂點 V 為$\overline{AF}$的中點。

[說明]：因為 V 為拋物線上的點，$VF=d(V,L)=\overline{AV}$，所以 V 為$\overline{AF}$的中點。

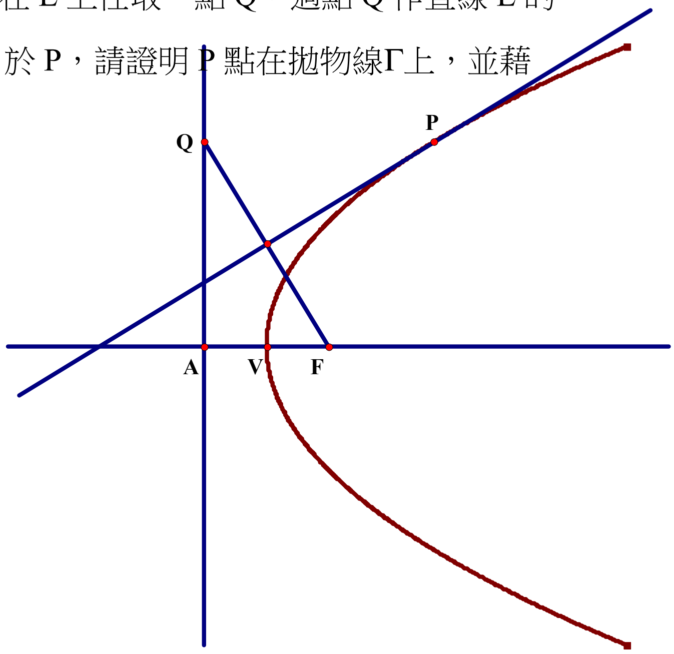
(2)拋物線的正焦弦長為焦距的 4 倍。

[說明]：因為$\overline{P_1P_2}=2\overline{P_1F}$，且$\overline{P_1F}=d(P_1,L)=\overline{AF}=2\cdot\overline{VF}$ 所以正焦弦長$\overline{P_1P_2}=4\cdot\overline{VF}$。

(練習1) 右下圖為一拋物線的部分圖形，
且 A、B、C、D、E 五個點中有一為其焦點。
試判斷哪一點是其焦點？
(可利用你手邊現有簡易測量工具)
(1) A(2) B(3) C(4) D (5) E　　(90 學科)



[例題1] (拋物線的作圖)
設拋物線Γ以 L 為準線，F 為焦點，在 L 上任取一點 Q，過點 Q 作直線 L 的垂線 N，再作$\overline{QF}$的中垂線交直線 N 於 P，請證明 P 點在拋物線Γ上，並藉此說明拋物線沒有界限。



[例題2] 在座標平面上，設Γ是以 F(3,−1)為焦點，L：$x-y+1=0$ 為準線的拋物線，求(1)Γ的頂點。(2)Γ的對稱軸方程式。(3)正焦弦長(4)Γ的方程式

Ans：(1)$(\frac{7}{4},\frac{1}{4})$ (2)$x+y-2=0$ (3)$5\sqrt{2}$ (4)$x^2+2xy+y^2-14x+6y+19=0$

(練習2) 關於方程式$|\frac{3x+y-19}{\sqrt{10}}|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

所代表的錐線圖形Γ，下列何者為真？

(A)Γ為拋物線 (B)(1,−2)為Γ的焦點

(C)$3x+y-19=0$ 為Γ的漸近線

(D)$x-3y+7=0$ 為Γ的對稱軸

(E) (3,1)是Γ的頂點。 Ans：(A)(D)

(練習3) 若一拋物線以 F(1,1)為焦點，L：$x+y+2=0$ 為準線，求(1)拋物線的方程式(2)對稱軸方程式(3)正焦弦長(4)頂點坐標

Ans ：(1)$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$(2)$x-y=0$(3)$4\sqrt{2}$(4)(0,0)

(練習4) 設一拋物線之頂點 V(1,2)，準線 L 之方程式 $x+y+6=0$，求其焦點坐標。

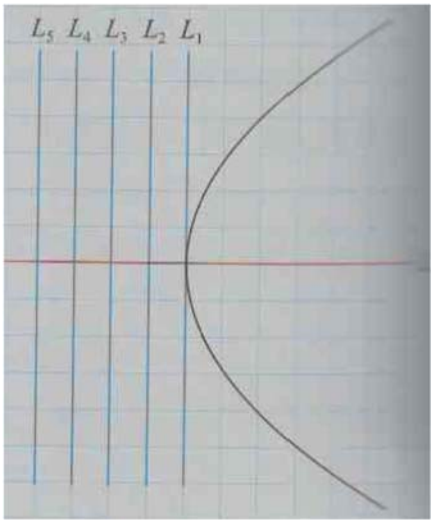
Ans：$(\frac{11}{2},\frac{13}{2})$

(練習5) 設拋物線Γ的焦點 F、準線 L，平面上的點，除了Γ之外，被分成兩個區域，其中包含焦點 F 的區域稱為拋物線內部，不包含焦點 F 的區域稱為拋物線的外部。試拋物線的定義證明：

(1)若 R 點在拋物線內部，則$\overline{RF}<d(R,L)$。

(2)若 R 點在拋物線外部，則$\overline{RF}>d(R,L)$。

(練習6) 右圖是一條拋物線的部分圖形，L 為其準線，且 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5 五條直線中有一條為拋物線的準線，試問哪一條是其準線？



(丁)拋物線的標準式

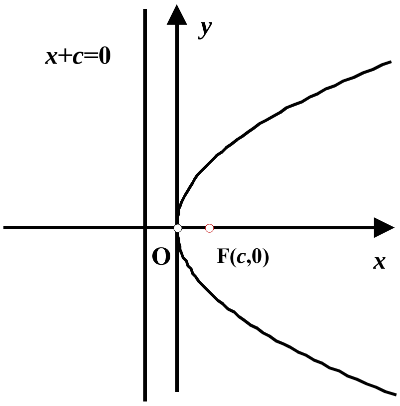
例題二中，以 F(3,−1)為焦點，L：$x-y+1=0$ 為準線的拋物線方程式為 $x^2+2xy+y^2-14x+6y+19=0$，這樣的方程式稍嫌複雜，是否可以選取適當的座標軸，使得我們可以用較為簡單的方程式來描述拋物線？當選取座標軸使得它們分別平行拋物線的對稱軸與準線，那麼描述拋物線的方程式就不會有 xy 項，我們稱為**標準式**。

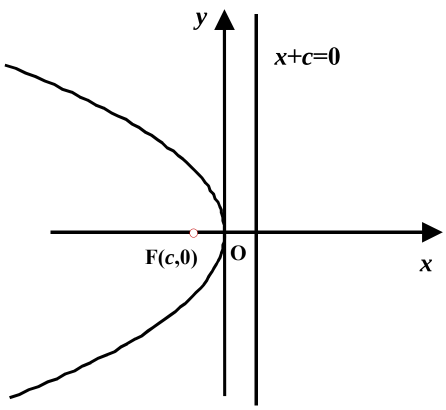
一、頂點在(0,0)的標準式

(1)設拋物線Γ的焦點 F 為$(c,0)$、準線 L：$x+c=0$，則Γ的方程式為 $y^2=4cx$。

設 P(x,y)為Γ上任意點，根據定義 PF=d(P,L)可得

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|x+c| \Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=(x+c)^2 \Leftrightarrow y^2=4cx$。



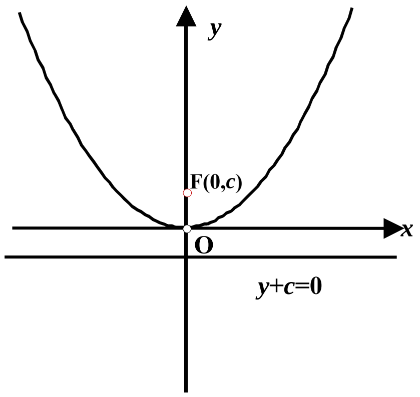


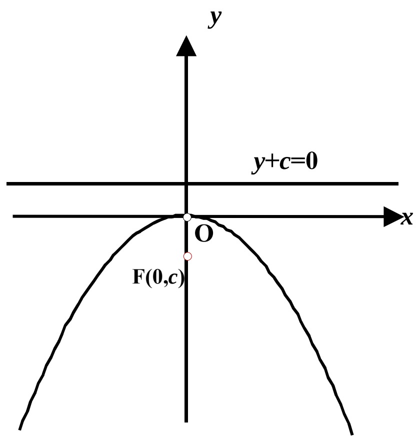
方程式 $y^2=4cx$ 的特徵：
(a)$c>0$，開口向右；$c<0$，開口向左。
(b)焦距=$|c|$，正焦弦長=$4|c|$。
(c)頂點(0,0)

(2) **設拋物線Γ的焦點 F 為$(0,c)$、準線 L：$y+c=0$，則Γ的方程式為 $x^2=4cy$。**

設 P(x,y)為Γ上任意點，根據定義 PF=d(P,L)可得

$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=|y+c| \Leftrightarrow x^2+(y-c)^2=(y+c)^2 \Leftrightarrow x^2=4cy$。

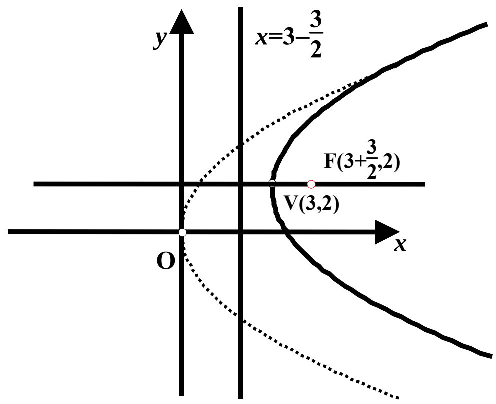




方程式 $x^2=4cy$ 的特徵：
(a)$c>0$，開口向上；$c<0$，開口向下。
(b)焦距=$|c|$，正焦弦長=$4|c|$。
(c)頂點(0,0)

二、頂點在任一點的標準式

例子：



將拋物線Γ：$y^2=6x$ 沿著向量$\vec{l}=(3,2)$平行移動得到一個新的拋物線Γ'，試求Γ'的方程式。

[解答]：
(1°)設Γ'上的任一點 $Q(x',y')$，因為 $Q(x',y')$沿向量$-\vec{l}=(-3,-2)$可得 $P(x,y)$在Γ上，即 $x-x'=-3$，$y-y'=-2$ $\Rightarrow x=x'-3$，$y'=y-2$ $\Rightarrow (y'-2)^2=6(x'-3)$。
因此Γ' 的方程式為$(y-2)^2=6(x-3)$。

(2°)考慮Γ的頂點(0,0)、焦點$(\frac{3}{2},0)$、正焦弦長=6、對稱軸 $y=0$、準線 $x=\frac{-3}{2}$。

考慮Γ'的頂點(3,2)、焦點$(\frac{3}{2}+3,2)$、正焦弦長=6、對稱軸 $y=3$、準線 $x=\frac{-3}{2}+3$。

(3°)由(1)(2)，可以得知就點坐標、方程式而言，形式會改變，但正焦弦長不變。

結論：

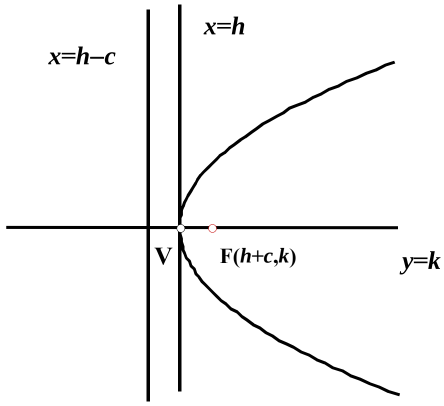
方程式 $f(x,y)=0$ 的圖形沿向量 $\vec{l}=(h,k)$ 平移，所得的圖形的方程式為 $f(x-h,y-k)=0$。 (即原方程式中的 x,y 用 $x-h,y-k$ 來取代)

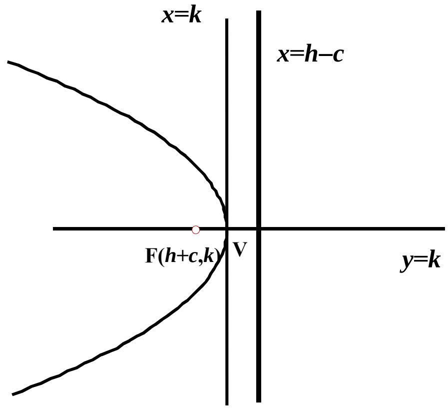
(1)方程式$(y-k)^2=4c(x-h)$的特徵：

(a)$c>0$，開口向右；$c<0$，開口向左。

(b)焦距$=|c|$，正焦弦長$=4|c|$。

(c)頂點(h,k)



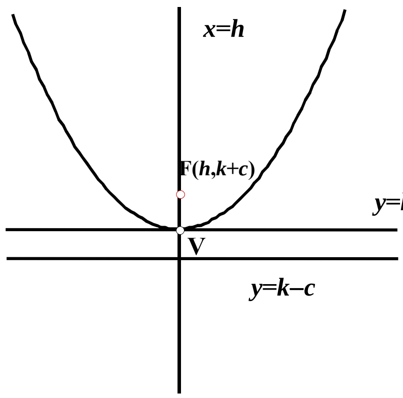


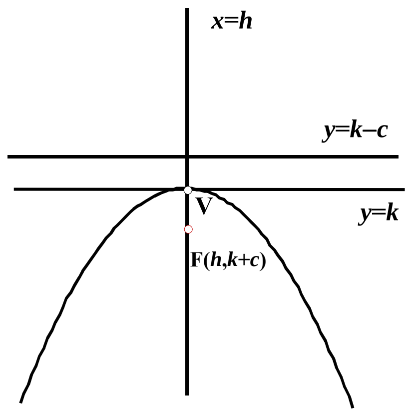
(2)方程式$(x-h)^2=4c(y-k)$的特徵：

(a)$c>0$，開口向上；$c<0$，開口向下。

(b)焦距$=|c|$，正焦弦長$=4|c|$。

(c)頂點(h,k)





[例題3] (二次函數的圖形為拋物線)

試求 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2+1$ 的頂點、焦點、對稱軸與準線。

Ans：頂點$(1,\frac{3}{4})$、焦點$(1,\frac{7}{4})$、準線 $y=\frac{-1}{4}$、對稱軸 $x=1$

[例題4] 求合乎下列條件之拋物線方程式：

(1)通過(2,3)、(−1,6)二點，其對稱軸為 $x=1$

(2)焦點(3,−4)，準線與軸的交點為(−1,−4)

(3)焦點(−2,0)、準線平行於 y 軸，正焦弦長為 12。

(4)正焦弦的兩端點為(1,5)、(1,−1)

Ans：(1)$(x-1)^2=y-2$ (2)$(y+4)^2=8(x-1)$ (3)$y^2=-12(x-1)$或 $y^2=12(x+5)$

(4)$(y-2)^2=6(x+\frac{1}{2})$或$(y-2)^2=-6(x-\frac{5}{2})$

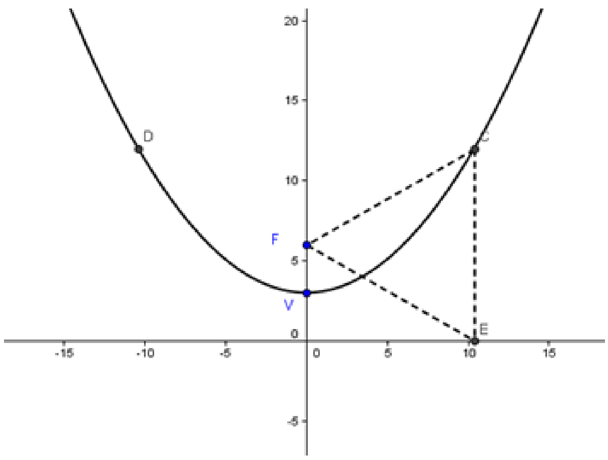
(練習7) 求拋物線 $x^2-8x+3y+10=0$ 的(1)對稱軸(2)頂點(3)焦點(4)準線(5)正焦弦長(6)圖形 Ans：(1)$x-4=0$ (2)V(4,2)(3)F$(4,\frac{5}{4})$(4)$y-\frac{11}{4}=0$(5)3

(練習8) 求合乎下列條件的拋物線方程式：
(1)頂點 V(2,3)，軸平行 x 軸，正焦弦長=9
(2)準線平行 x 軸，焦點(3,−2)且頂點在焦點上方，正焦弦長 16
(3)頂點在 y 軸上，對稱軸為 $y=2$，而焦點在直線 $x+2y=7$ 上
(4)頂點在 x 軸上，對稱軸平行 y 軸，且過點(1,1)、(4,4)
(5)已知頂點 V(5,−2)，準線方程式 L：$y+4=0$
Ans：(1)$(y-3)^2=9(x-2)$或$(y-3)^2=-9(x-2)$ (2)$(x-3)^2=-16(y-2)$
(3)$(y-2)^2=12x$ (4)$(x-2)^2=y$ 或 $(x+2)^2=9y$ (5) $(x-5)^2=8(y+2)$

(練習9) 試求對稱軸與 y 軸平行，且通過(1,0)、(2,2)、(3,8)三點的拋物線方程式。
Ans：$y=2x^2-4x+2$

(練習10) 設二次函數的圖形 $y=f(x)=2x^2-4x+7$，
(1)請將此二次函數的圖形化成$(x-h)^2=4c(y-k)$的形式。
(2)試求此拋物線的焦點與正焦弦長
Ans：(1)$(x-1)^2=\frac{1}{2}(y-5)$ (2)焦點$(1,\frac{41}{8})$、正焦弦長=$\frac{1}{2}$

[例題5] 坐標平面上有一以點 V(0,3)為頂點、F(0,6)為焦點的拋物線。設 P(a,b)為此拋物線上一點，Q(a,0)為 P 在 x 軸上的投影，
滿足∠FPQ=60°，則 b=_________。
(2007 學科能力測驗) Ans：12



[例題6] 坐標平面上給定點 A($\frac{9}{4}$,2)、直線 L：y=−5 與拋物線Γ：x^2=8y。以 d(P,L)表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在Γ上變動，則$|d(\text{P,L})-\overline{\text{AP}}|$之最大值為____________。

[解法]：

設 x^2=8y 的焦點為 F，準線為 $\text{L}^{/}$

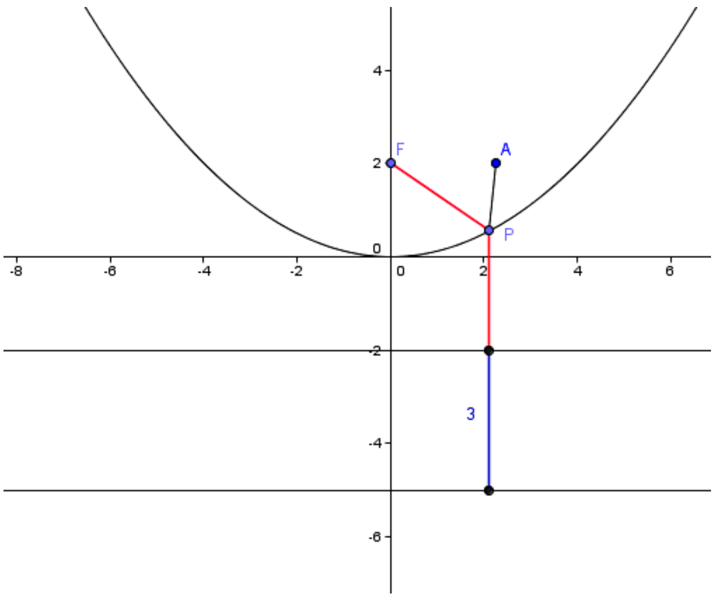
所以 F(0,2)、$\text{L}^{/}$：y=−2，依據拋物線的定義，$d(\text{P},\text{L}^{/})=\overline{\text{PF}}$

而 $d(\text{P,L})=d(\text{P},\text{L}^{/})+3$，故$|d(\text{P,L})-\overline{\text{AP}}|=|d(\text{P},\text{L}^{/})+3-\overline{\text{AP}}|=|\overline{\text{PF}}-\overline{\text{AP}}+3|$，即

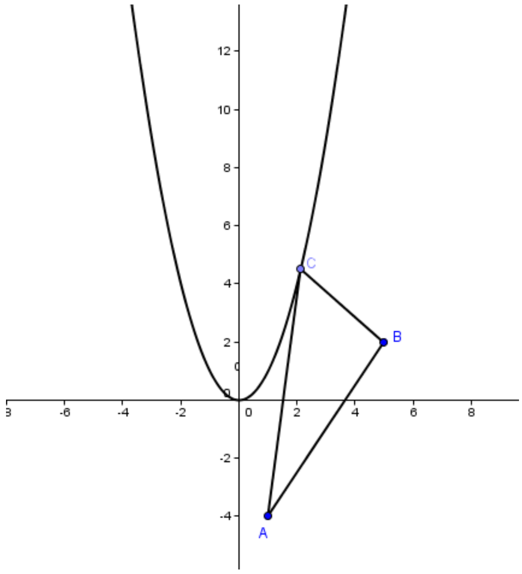
求$|d(\text{P,L})-\overline{\text{AP}}|$之最大值　⇔ 求$|\overline{\text{PF}}-\overline{\text{AP}}+3|$之最大值

因為$|\overline{\text{PF}}-\overline{\text{AP}}|\le\overline{\text{AF}}$，且等號成立時 F、A、P 三點共線

所以$|\overline{\text{PF}}-\overline{\text{AP}}+3|\le\overline{\text{AF}}+3=\frac{21}{4}$，當 F−A−P 時等號會成立。



[例題7] 設 A(1,–4)、B(5,2)，點 C 在拋物線 $y=x^2$ 上，欲使ΔABC 的面積最小，則 C 點的坐標為何？ $C(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$



(練習11) 在拋物線 $y^2=20x$，求一點 P 使 P 與焦點的距離等於 15，求 P 的坐標為何？Ans：$P(10, \pm 10\sqrt{2})$

(練習12) 設拋物線之軸與 x 軸垂直且過 A(0,2)、B(3,5)，而其頂點在直線 $x-y=0$ 上，求其方程式。 Ans：$(x-6)^2=-9(y-6)$

(練習13) 拋物線 $y=x(ax+b)$之焦點(4,–3)求數對(a,b)=？Ans：$(\frac{1}{4},-2)$或$(\frac{-1}{16},\frac{1}{2})$

(練習14) 在拋物線 $y^2=12x$ 上求一點 P 使得 P 到焦點 F 與定點 A(5,4)之距離和 PF+PA 為最小，求 P 點的坐標為何？Ans：$(\frac{4}{3},4)$

(練習15) 試求拋物線 $y^2=16x$ 上與直線 $4x-3y+24=0$ 距離最短之點的坐標，及最短距離？Ans：$(\frac{9}{4},6)$，最短距離為 3。

綜合練習

(1) 求下列各拋物線之方程式:

(a)頂點$(-1, 2)$，準線 $x-2=0$.

(b)焦點$(1, -1)$，準線為 $y+3=0$.

(c)焦點$(1, 1)$，對稱軸 $x-1=0$，焦點與準線的距離為 4 .

(d)焦點$(-2, 0)$，準線平行於 y 軸，正焦弦長 8 .

(e)以 $y+1=0$ 為對稱軸且過$(3, 1)$，$(9, 3)$.

(2) 求下列各拋物線的頂點、焦點坐標及準線、對稱軸的方程式：

(a) $y^2=-8x$ 。

(b) $(x+2)^2=6(y-2)$ 。

(c) $y=-2x^2-4x+5$ 。

(3) 一拋物線的準線垂直 x 軸，且過$(1,0)$，$(-1,1)$，$(5,-1)$三點，則此拋物線方程式為何？其焦點坐標為何？

(4) 設一拋物線的方程式為$\dfrac{(3x+4y-7)^2}{25}=(x-4)^2+(y-5)^2$，則此拋物線的

(a)焦點坐標為__________， (b)頂點坐標為__________，

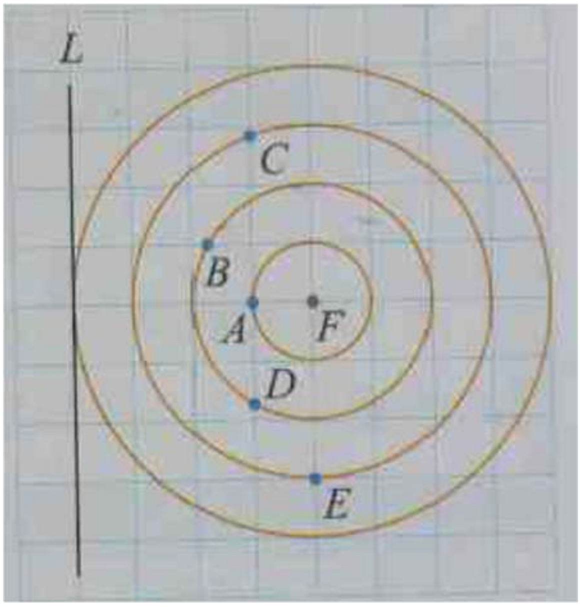
(c)準線方程式是__________， (d)對稱軸方程式是__________，

(e)正焦弦長為__________ .

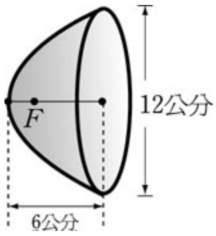
(5) 過點$(7,8)$且與 $y^2=4x$ 同焦點且同軸的拋物線方程式。

(6) 拋物線通過 $P(6, 5)$且和拋物線 $y^2-4x+6y+5=0$ 有相同的對稱軸與相同的焦點，求此拋物線的方程式。

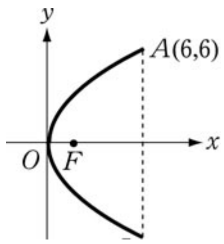
(7) 右圖中所有圓均是以 F 為圓心的同心圓，試問下列哪些點在以 F 為焦點，L 為準線的拋物線上？



(8) 如右圖(a)，汽車前燈的外形是拋物線沿對稱軸旋轉而成的拋物面它的縱截面之輪廓是拋物線的一部分 (如右圖(b))。若燈口的直徑是 12 公分，燈深 6 公分，試求焦點與頂點的距離。



圖(a)



圖(b)

(9) 坐標平面上一拋物線Γ：$y^2=8x$，其焦點為 F，軸為 L。
今一光線自點 P(7,3)出發，以平行 L 的方向射向拋物線Γ，並反射到 F，求
(a)拋物線的準線方程式。
(b)此光線由 P 點到 F 點所行經的距離。

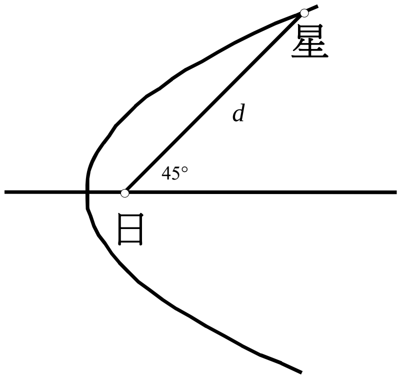
(10) 在坐標平面上，過 F（1，0）的直線交拋物線 Γ：$y^2=4x$ 於 P，Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則 P 點的 x 坐標為______（化成最簡分數）。

(11) 設拋物線 $y^2=12x$ 上一點 P 與 A(3,0)、B(b,0)，其中 $b>3$，形成一個正三角形 PAB，試求 b=？

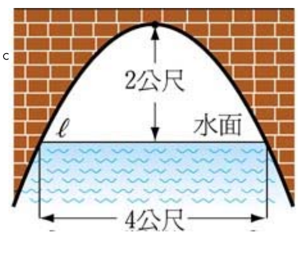
(12) 有一開口向上的拋物線Γ，Γ的焦點為 F，直線 PQ 過 F 並且交Γ於 P、Q 兩點，已知$\overline{PF}=4$、$\overline{QF}=6$，令θ為直線 PQ 與對稱軸的銳夾角，試問 cosθ=？

(13) 拋物線 $x^2=8y$ 上有兩點 A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)且$\overline{AB}$過焦點 F，，已知$\overline{AB}=16$ 試問 y_1+y_2=？ [考慮拋物線的定義]

(14) 某慧星軌道為一拋物線，而以太陽為焦點，當此慧星與太陽距離為 d 時，兩者連線與拋物線之軸成 45° 之夾角(如圖)，則
(a)當兩者與軸垂直時，其距離為__________。
(b)兩者最近時，其距離為_________。



(15) 如右圖，一座拱橋的邊界線，從正面望去呈拋物線形，當水面在 l 直線時，拱頂離水面 2 公尺，水面寬 4 公尺。



問水面下降 1 公尺後，水面寬多少公尺？

(16) 已知坐標平面上圓 O_1：$(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 O_2：$(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 L：$x=-5$ 相切。若Γ為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則Γ的焦點坐標為__________。(化為最簡分數) (2008 學測)

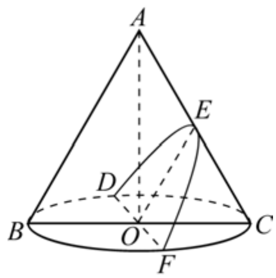
(17) 設 a、b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=7$。若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$與 x 軸交於 R、S，則 $\overline{RS}=$________ (2010 學科能力測驗)

(18) 設拋物線之頂點(1,16)其軸平行 y 軸，若其圖形截 x 軸所得線段之長為 8，求其方程式。

(19) 若 P 為拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$ 上的一點，A(1,−1)、B(3,2)，求ΔABP 面積之最小值。

(20) 設 k 為一常數。已知一拋物線通過點（2，0），且焦點為（1，2），準線為 $kx+y+1=0$，求此拋物線頂點的坐標。

進階問題



(21) 如右圖，直圓錐頂點為 A，$\overline{BC}$為底面之直徑，O 為圓心，$\overline{AE}=\overline{CE}$，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$於 O，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=6$，則 D、E、F 三點所在平面截圓錐得一截痕，則其正焦弦長為__________。

(22) 已知拋物線 $y=ax^2+bx+2a+b(a\neq0)$之頂點為(1,2)，求 a,b 之值。

(23) $y=ax^2+bx+c(a>0)$之焦點(−1,3)且圖形過(3,3)，則數對$(a,b,c)=$？

(24) 設 $P(a^2,2a)$，$a>0$，為拋物線 $y^2=4x$ 上一點，P 與焦點之連線交拋物線於另一點 Q。設點 R 的坐標為(3,0)，則△PQR 的面積為__________，若 P 在拋物線上移動，當 a=________時，△PQR 的面積最小。

(25) 設$\overline{BC}$為等腰三角形 ABC 之底邊，且$\overline{BC}=2$，點 A 在以 B 為頂點 C 為焦點的一拋物線上，求ΔABC 之腰長。

(26) 設 a 為實數，試求拋物線 $y=x^2+ax+1$ 的頂點所成軌跡的方程式。

(27) 若拋物線之頂點 V(−1,0)其軸為 x 軸，與圓 $x^2+y^2-3x=0$ 恰交兩點，求拋物線的方程式。

綜合練習解答

(1)(a)$(y-2)^2=-12(x+1)$，(b)$(x-1)^2=4(y+2)$，(c)$(x-1)^2=8(y+1)$或
$(x-1)^2=-8(y-3)$，(d)$y^2=-8x$ 或 $y^2=8(x+4)$，(e)$(y+1)^2=2(x-1)$，

(2)

(a)頂點 $(0,0)$ ，焦點 $(-2,0)$ ，準線 $x=2$ ，對稱軸方程式 $y=0$;

(b)頂點 $(-2,2)$ ，焦點 $(-2,\frac{7}{2})$ ，準線 $y=\frac{1}{2}$ ，對稱軸方程式 $x=-2$;

(c)頂點 $(-1,7)$ ，焦點 $(-1,\frac{55}{8})$ ，正焦弦長 $\frac{1}{2}$ ，準線 $\frac{57}{8}$ ，對稱軸方程式 $x=-1$

(3)$x=y^2-3y+1$；$(-1，\frac{3}{2})$

(4)(a)(4 , 5)(b)($\frac{5}{2}$, 3)(c)$3x+4y-7=0$(d)$4x-3y-1=0$(e)10

(5)$y^2=-32(x-9)$或 $y^2=8(x+1)$

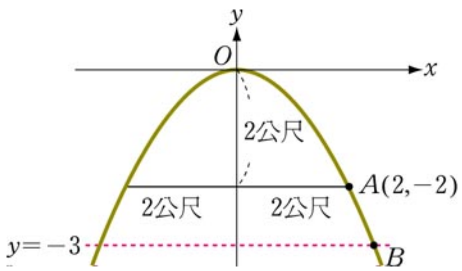
(6)$(y+3)^2=8(x+2)$或$(y+3)^2=-32(x-8)$

(7)C

(8)$\frac{3}{2}$公分

(9)(a)$x=-2$　(b)9

(10) $\frac{3}{2}$



(11)$b=15$

(12)$\frac{1}{5}$

(13)12

(14) (a)$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$d (b)$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$d

(15)$2\sqrt{6}$ 公尺[提示：在拋物線所在的平面建立直角坐標系，以拱頂為原點，過拱頂的鉛垂線為 y 軸，水平線為 x 軸，單位長皆為 1 公尺，如上圖所示

(16)F$(\frac{-1}{5},\frac{53}{5})$

(17)$\sqrt{41}$

[解法]：

設 $R(x_1,y_1)$、$S(x_2,y_2)$、$P(u_1,v_1)$、$Q(u_2,v_2)$

依題意，$x^2+ax+b=0$ 兩根為 u_1、u_2，且$\overline{PQ}=|u_1-u_2|=7$；

$x^2+ax+(b+2)=0$ 兩根為 x_1、x_2，且$\overline{RS}=|x_1-x_2|$

由根與係數的關係，可以得知：

$u_1+u_2=-a$，$u_1u_2=b\Rightarrow 49=(u_1-u_2)^2=(u_1+u_2)^2-4u_1u_2=a^2-4b$

$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=b+2\Rightarrow(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2-4(b+2)=a^2-4b-8=41$

故$\overline{\mathrm{RS}}=\sqrt{41}$ 。

(18)$(x-1)^2=-(y-16)$ [提示：可令拋物線為$(x-1)^2=4c(y-16)$，拋物線與 x 軸交點$(x_1,0)$、$(x_2,0)\Rightarrow|x_1-x_2|=8$，且 x_1 與 x_2 分別為 $x^2-2x+1+64c=0$ 的兩根，再利用跟與係數的關係求 c]

(19)$\frac{43}{8}$ [提示：可令 $P(t,\frac{1}{2}t^2+2t+3)$，計算 P 點到直線 AB 的距離的最小值]

(20)（0，$\frac{3}{2}$）

(21)3[提示：再拋物線所在的平面上建立一個坐標系，取 E(0,0)、O(3,0)、D(3,3)、F(3,−3)，可令拋物線為 $y^2=4cx$
再代入 D(3,3) $\Rightarrow 4c=9 \Rightarrow$正焦弦長=9]

(22)$a=-2,b=4$

(23) $(a,b,c)=(\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{9}{8})$

(24)△PQR 的面積為 $2a+\frac{2}{a}$，$a=1$

(25)3[提示：建立坐標系取 B(0,0)、C(2,0)$\Rightarrow$此時拋物線方程式為 $y^2=8x$，再令 $A(2,y)$，代入方程式計算 y，再計算腰長]

(26)$y=-x^2+1$

(27)$y^2=x+1$[提示：令拋物線方程式為 $y^2=k(x+1)$，因為圓與拋物線均對稱於 x 軸，所以兩交點亦對稱 x 軸，因此聯立方程組$\begin{cases} y^2=k(x+1) \\ x^2+y^2-3x=0 \end{cases}$的解為$(x,y_1)$、$(x,y_2)$，因此將 $y^2=k(x+1)$代入 $x^2+y^2-3x=0$ 中，可得 $x^2+(k-3)x+k=0$ 只有一個正解 $\Rightarrow D=(k-3)^2-4k=0 \Rightarrow k=1$ 或 9，但重根為正根，因此 $k=1$]