

§2-3 三元一次聯立方程組

解決許多實際問題時，通常我們假設未知數，根據問題的條件限制，可以形成型如

(A)或(B)的一次聯立方程式：

$$(A) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

我們用幾何的觀點來看(A)(B)的解：

坐標平面上，二元一次方程式的圖形是一條直線，討論型如(A)的解，就相當於討論兩直線在平面上的相交情形。

空間坐標中，三元一次方程式的圖形是一個平面，同樣的，討論型如(B)的解，就相當於討論三個平面在空間中的相交情形。

透過消去法或二階行列式來得到二元一次方程組的解(克拉瑪公式)，並且判別兩直線的關係，本單元會有類似的想法。

(1)用消去法來解三元一次方程組。

(2)用三階行列式來表示三元一次方程組的解(克拉瑪公式)。

(3)用平面的法向量或三階行列式來判別三平面的關係。

(甲)消去法

透過假設未知數，解決許多實際的問題會形成解幾個三元一次的方程式的共同解，以下面的例子來說：

某群顧客到早餐店買了 4 個漢堡，3 個貝果，3 杯牛奶，共計 350 元；第二群顧客買 4 個漢堡，2 個貝果，5 杯牛奶，共計 360 元；第三群顧客買 8 個漢堡，8 個貝果，10 杯牛奶，共計 840 元。問漢堡、貝果與牛奶的單價各為多少元？

假設每個漢堡 x 元，每個貝果 y 元，每杯牛奶 z 元，根據問題的內容，可以列出三元一次聯立方程式

$$(*) : \begin{cases} 4x + 3y + 3z = 350 \\ 4x + 2y + 5z = 360 \\ 8x + 8y + 10z = 840 \end{cases}$$

由幾個三元一次方程式所形成的一次聯立方程式，我們統稱為**三元一次方程組**。

解三元一次方程組的方法，使用加減消去法是一個很自然的想法，先消去一個未知數，形成二元一次方程組，再利用二元一次方程組的解法，將三元一次方程組的解依序求出來。

我們以解方程組(*)為例，來說明如何用加減消去法解三元一次方程組：

[例題1] 試求三元一次方程式組：
$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 350 \\ 4x + 2y + 5z = 360 \\ 8x + 8y + 10z = 840 \end{cases}$$
的解。

[解法]：

利用加減消去法來求三元一次方程式組(A)：
$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 350 \dots (1) \\ 4x + 2y + 5z = 360 \dots (2) \\ 8x + 8y + 10z = 840 \dots (3) \end{cases}$$
的解：

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 350 \dots (1) \\ 4x + 2y + 5z = 360 \dots (2) \\ 8x + 8y + 10z = 840 \dots (3) \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1) \times -1 + (2) \\ (1) \times -2 + (3)}}} \begin{cases} -y + 2z = 10 \dots (4) \\ 2y + 4z = 140 \dots (5) \end{cases}$$

根據上面的步驟，可將三元一次方程組消去一個未知數 x ，產生 y, z 的二元一次方程組，

接下來利用加減消去法求出一元方程組 $\begin{cases} -y + 2z = 10 \dots (4) \\ 2y + 4z = 140 \dots (5) \end{cases}$ 的解，將

$(4) \times 2 + (5)$ ，得 $8z = 160$ ，解得 $z = 20$ ，代入第(4)式，得 $y = 30$ 。

最後再以 $y = 30, z = 20$ 代入第(1)式，得 $x = 50$ 。

所以得知漢堡一個 50 元，貝果一個 30 元，牛奶一杯 20 元。

[例題2] 試求三元一次方程組：
$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 5 \\ 7x + 8y + z = 31 \end{cases}$$
 的解。

[解法]：

利用加減消去法來求三元一次方程式組 $\begin{cases} x + 2y + z = 7 & (1) \\ 2x + y - z = 5 & (2) \\ 7x + 8y + z = 31 & (3) \end{cases}$ 的解：

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 & (1) \\ 2x + y - z = 5 & (2) \\ 7x + 8y + z = 31 & (3) \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1) + (2) \\ -(1) - (2)}}} \begin{cases} 3x + 3y = 12 \dots (4) \\ -6x - 6y = -24 \dots (5) \end{cases}$$

根據上面的步驟，可將三元一次方程組消去一個未知數 z ，產生 x, y 的二元一次方程組，

因為二元一次方程組 $\begin{cases} 3x + 3y = 12 \dots (4) \\ -6x - 6y = -24 \dots (5) \end{cases}$ 代表同一個方程式 $x + y = 4$ ，令

$x = t$ ，則 $y = 4 - t$

再代入(1)解得 $z = t - 1$ 。所以原方程組的解為
$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$
，其中 t 為任意實數。

(練習1) 試說明三平面 $\begin{cases} 4x+3y+3z=350 \\ 4x+2y+5z=360 \\ 8x+8y+10z=840 \end{cases}$ 相交情形。 Ans: 三平面交於一點。

(練習2) 試解三元一次方程組 $\begin{cases} x+y-z=5, \\ x+2y+z=8, \\ 5x+8y+z=1. \end{cases}$ 並解釋其所代表的三平面相交情形。

Ans: 無解，三平面兩兩相交於一直線，三直線不相交

(1) 加減消去法的原理

在例題一的解法中，解一次方程組 $\begin{cases} 4x+3y+3z=350 \\ 4x+2y+5z=360 \\ 8x+8y+10z=840 \end{cases}$ 的解，透過加減消去法轉

化成解一次方程組 $\begin{cases} 4x+3y+3z=405 \\ -y+2z=10 \\ 2y+4z=140 \end{cases}$ 的解，這兩個方程組的解會相同嗎？

使用加減消去法做一次方程組間的轉化，前後方程組的解會有什麼關係：

若 $E_1=0$ 、 $E_2=0$ 代表三元一次方程式，使用加減消去法作兩個一次方程組間的轉化：

$$(*) : \begin{cases} E_1 = 0 \dots (1) \\ E_2 = 0 \dots (2) \end{cases} \xrightarrow[(3) \times (-a) + (4)]{(1) \times a + (2)} (**): \begin{cases} E_1 = 0 \dots (3) \\ a \cdot E_1 + E_2 = 0 \dots (4) \end{cases}$$

若 (x_0, y_0, z_0) 為 $(*)$ 的解， (x_0, y_0, z_0) 代入 $a \cdot E_1 + E_2 = 0$ 也會成立，因此 (x_0, y_0, z_0) 也是 $(**)$ 的解。

反過來說，若 (m, n, l) 為 $(**)$ 的解， (m, n, l) 代入 $(-a) \cdot E_1 + (a \cdot E_1 + E_2) = 0$ 也會成立，即代入 $E_2 = 0$ 會成立，因此 (m, n, l) 也會是 $(*)$ 的解。即一次方程組 **(B)** 與 **(C)** 解的形式是相同的。

故可以得知一次方程組經過加減消去法的轉化，前後的解會保持不變。

若適當選取 a ，就可以使得 $aE_1 + E_2 = 0$ 轉化成二元一次方程式，因此在求解三元一次方程組時，可以利用加減消去法先消去一個未知數，使得原方程組轉化成二元一次方程組，再解出二元一次方程組的解，進而求出三元一次方程組的解。

(練習3) 設 $f(x)$ 為一個二次多項式函數，且滿足 $f(1)=4$ ， $f(-3)=24$ ， $f(2)=9$ ，試求 $f(x)$ 。
Ans: $f(x)=2x^2-x+3$ 。

(練習4) 求過平面上 $A(0, 0)$ ， $B(1, 1)$ ， $C(-3, 3)$ 三點的圓方程式。
Ans: $x^2+y^2+2x-4y=0$

(乙) 克拉瑪公式

回顧二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的克拉瑪公式

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

若 $\Delta \neq 0$ ，則二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ， $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ 。

(1) 三元一次方程組的克拉瑪公式：

$$\text{考慮三元一次方程組 } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \cdots (3) \end{cases}, \text{ 其中 } x, y, z \text{ 為未知數,}$$

使用代入消去法解之：

$$\text{由(1)} \Rightarrow a_1x + b_1y = -c_1z + d_1, \text{ 由(2)} \Rightarrow a_2x + b_2y = -c_2z + d_2$$

由二元一次方程組之求解可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -c_1z + d_1 & b_1 \\ -c_2z + d_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1z + d_1 \\ a_2 & -c_2z + d_2 \end{vmatrix}$$

整理可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (4)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (5)$$

$$\text{將(3)} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ 得 } a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (6)$$

(4)(5)代入(6)，消去 x, y 兩個未知數

$$a_3 \left(- \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) + b_3 \left(\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} \right) + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

整理之後得

$$\left(a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) z = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (**)$$

y, z 為未知數，

引用三階行列式的符號，

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

則可得 $\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}$ ，當 $\Delta \neq 0$ ，可得 $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ， $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ ， $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ 稱為**克拉瑪公式**。

結論：

(a)若 $\Delta \neq 0$ ，則方程組恰有一解： $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta})$ 。[克拉瑪公式]

(b)若 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ，則方程組無解或無限多解。

(c)若 $\Delta = 0$ ， Δ_x 、 Δ_y 、 Δ_z 有一不為 0，則方程組無解。

[例題3] 試利用克拉瑪公式，解一次方程組
$$\begin{cases} x-y+z=10 \\ 3x+2y=5 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$
。

[解法]：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 + 6 = 11 \neq 0, \text{ 所以原方程組恰有一組解。}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 + 5 - 4 + 10 = 51,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 - 5 - 60 = -49,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 30 - 20 - 5 + 6 = 10,$$

$$\text{故 } x = \frac{51}{11}, y = -\frac{49}{11}, z = \frac{10}{11}。$$

(練習5) 試以克拉瑪公式解方程組
$$\begin{cases} 7x+3y-2z-7=0 \\ 2x+5y+3z-20=1 \\ 5x-y+5z-10=8 \end{cases}$$
 Ans : $x=1, y=2, z=3$





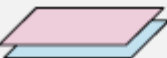
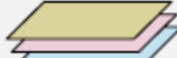





(2)三元一次方程組的解之幾何意義：

前面利用三階行列式推導了三元一次方程組的克拉瑪公式，現在用幾何的角度

來探討三元一次方程組(L)：
$$\begin{cases} E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ E_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 的解，而討論(L)的解，就相

當於討論空間中三平面 E_1 、 E_2 、 E_3 的相交情形。

先考慮 E_2 與 E_3 相交情形—重合、平行、交於一線，然後再加入 E_1 一併考慮三平面的相交情形。我們將三平面相交的情形與對應一次方程組的解列表如下：

E_2 與 E_3 的相交情形	三平面 E_1, E_2 與 E_3 的相交情形		
E_2 與 E_3 重合 	E_1 與 $E_2 (E_3)$ 重合  (a) 無限多解	E_1 與 $E_2 (E_3)$ 平行  (b) 無解	E_1 與 $E_2 (E_3)$ 交於一直線  (c) 無限多解
E_2 平行 E_3 	E_1, E_2 與 E_3 三平面平行  (d) 無解		E_1, E_2 與 E_3 交於兩平行線  (e) 無解
E_2 與 E_3 交於一直線 	E_1, E_2 與 E_3 兩兩交於一直線  (f) 無解	E_1, E_2 與 E_3 交於一直線  (g) 無限多解	E_1, E_2 與 E_3 交於一點  (h) 恰有一解

當 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 時，可以利用三階行列式可以推導三元一次方程組的克拉瑪公式，

上面表格中三平面相交的情形，也可以用 Δ 是否等於 0 來做一些分類。

設三平面 E_1, E_2, E_3 的法向量依序為 $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ 、 $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 、 $\vec{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ ，

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1, b_1, c_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) = \vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3)$$

(1) 若 E_2 與 E_3 平行或重合，則 $\vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ ，因此 $\vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = \vec{0}$ ，故 $\Delta = \vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3) = 0$

(2) 若 E_2 與 E_3 交於一直線 L ，則 \vec{n}_2 不平行 \vec{n}_3 ，因此 $\vec{n}_2 \times \vec{n}_3 \neq \vec{0}$ ，

此時 $\vec{n}_2 \times \vec{n}_3$ 為交線 L 的方向向量。

(1°) 若 E_1 與 L 平行或重合(三平面兩兩相交於一直線或三平面交於一直線)，

此時 $\vec{n}_1 \perp (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3)$ ，故 $\Delta = \vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3) = 0$ 。

(2°)若 E_1 與 L 恰交於一點(三平面交於一點)，此時 \vec{n}_1 與 $(\vec{n}_2 \times \vec{n}_3)$ 不垂直，

故 $\Delta = \vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3) \neq 0$ 。

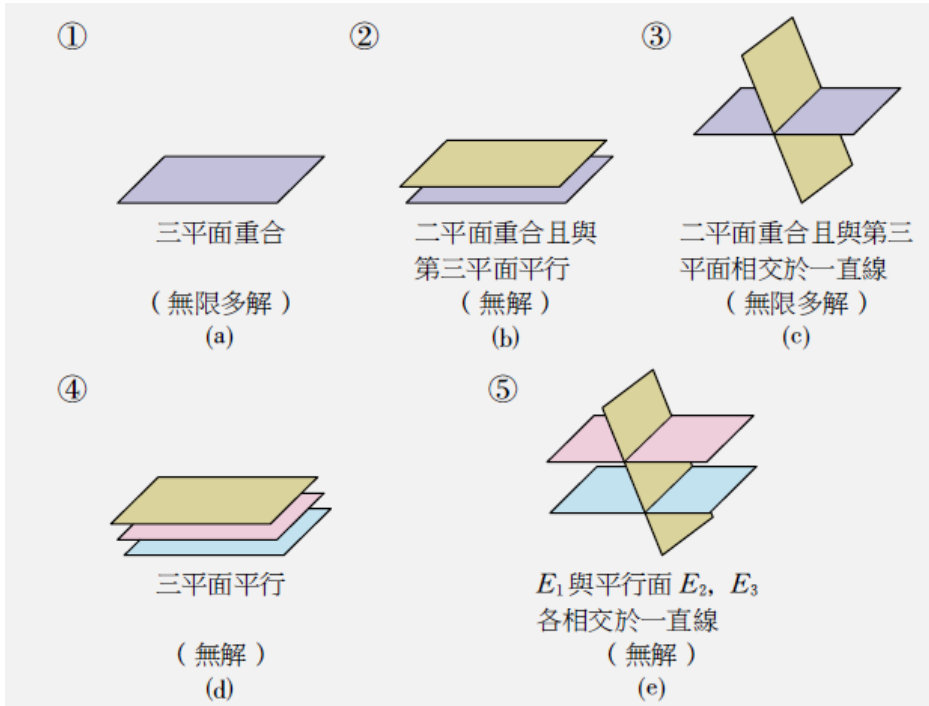
根據前面的討論，我們將這些結果整理如下：

(一)三平面 $\begin{cases} E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 的相交情形與對應解的個數有以下幾種情形：

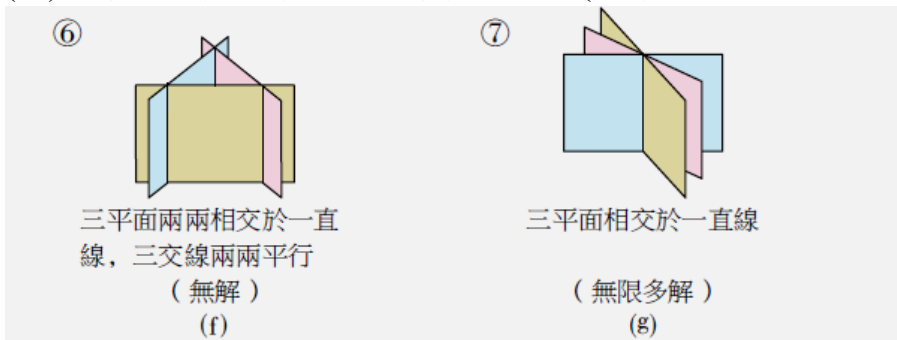
形：

(A) $\Delta = 0$ ，三平面的關係有下列七種：

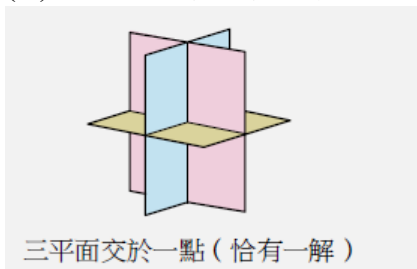
(1°)至少兩個平面平行或重合(至少兩個平面的法向量平行)



(2°)三平面中任兩平面均不平行與重合(三平面的法向量均不互相平行)



(B) $\Delta \neq 0$ ，三平面恰相交於一點(三平面法向量不共平面)



(二)一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 的解依 Δ 來分類，可以分成：

(1) $\Delta=0$ 時，方程組可能無解或無限多解。

(2) $\Delta\neq 0$ 時，方程組恰有一組解。

[例題4] 試判別方程組 $\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 13z = 7 \\ 4x + 5y + 21z = 11 \end{cases}$ 中三平面的關係，並求其解。

[分析]：

\because 三平面的法向量均不互相平行，且 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 13 \\ 4 & 5 & 21 \end{vmatrix} = 0$ 。

根據三平面的相交情形，可以得知它們的相交情形只可能為：
三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點或三平面相交於一直線。
因此我們可以先求出二平面的交線 L，再討論 L 與另一平面相交情形。

[解法]：

先求二平面 $\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 13z = 7 \end{cases}$ 的交線，令 $z=t$ ，代入平面的方程式得

$\begin{cases} x + y = 2 - 4t \cdots \cdots (1) \\ 2x + 3y = 7 - 13t \cdots \cdots (2) \end{cases}$ ，(1) $\times 3 -$ (2)可得 $x = -1 + t$ ，代入(2)得到 $y = 3 - 5t$

所以交線 L 可表為 $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = t \end{cases}$ ， t 為實數。

接下來考慮直線 L 與平面 $4x + 5y + 21z = 11$ 的關係：

將 L 的參數式代入 $4x + 5y + 21z = 11$

$\Rightarrow 4(-1+t) + 5(3-5t) + 21t = 11$

$\Rightarrow 11 = 11$ 。這代表直線 L 上的任一點都在平面 $4x + 5y + 21z = 11$ 上

故三平面相交於一直線，即一次方程組的解為 $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = t \end{cases}$ ， t 為實數。

[例題5] 就 k 值，討論下列三平面相交的情形： $\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x + 5y + z = -1 \\ x + 5y - 7z = k \end{cases}$

[解法]：

因為 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -35 - 10 + 3 + 5 - 5 + 42 = 0$ ，且三平面的法向量均不平行，

因此三平面的相交情形只可能為：

三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點或三平面相交於一直線。

接下來我們先求二平面 $\begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x+5y+z=-1 \end{cases}$ 的交線：

令 $z=t$ ，代入上面二平面，可得 $\begin{cases} x+3y=t-4 \cdots \cdots (1) \\ 2x+5y=-t-1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$

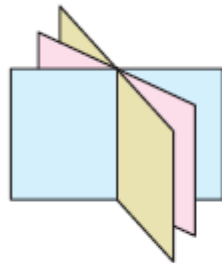
$(1) \times 5 - (2) \times 3$ 可得 $x = -8t + 17$ ，再代入(1)，得到 $y = 3t - 7$ 。

將直線 L 的參數式 $\begin{cases} x = -8t + 17 \\ y = 3t - 7 \\ z = t \end{cases}$ (t 為實數)，再代入平面 $x+5y-7z=k$

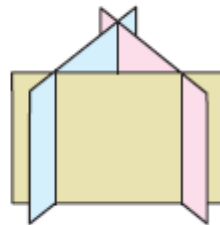
$(-8t+17)+5(3t-7)-7t=k, \Rightarrow 0t-18=k \cdots \cdots (*)$

當 $k=-18$ 時(*)為恆等式，即直線 L 會落在平面 $x+5y-7z=-18$ 上，此時三平面交於一直線。

當 $k \neq -18$ 時，(*)無解，即直線 L 與平面 $x+5y-7z=-18$ 平行，此時三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點。



$k = -18$



$k \neq -18$

[例題6] 齊次方程組： $\begin{cases} E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 至少會有(0,0,0)的解，試證明：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0。$$

結論：

齊次方程組： $\begin{cases} E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 至少會有(0,0,0)的解，所以

(a)若 $\Delta \neq 0$ ，則齊次方程組只有一組解 $(0,0,0)$ 。

(b)若 $\Delta=0$ ，則齊次方程組除了 $(0,0,0)$ 之外，尚其他的解。

(練習6)已知方程組
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 恰有一組解 (α, β, γ) ， $\alpha\beta\gamma \neq 0$

則方程組
$$\begin{cases} a_1x + 2b_1y + 3c_1z = 4d_1 \\ a_2x + 2b_2y + 3c_2z = 4d_2 \\ a_3x + 2b_3y + 3c_3z = 4d_3 \end{cases}$$
 之解為何？ Ans : $(4\alpha, 2\beta, \frac{4\gamma}{3})$

(練習7)解下列方程組，並判斷其幾何關係：

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 4y + 2z = 1 \\ -3x + z = 2 \\ -2x + 4y + 3z = 3 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} -4x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

Ans : (1)三平面交於一點 $(\frac{-2}{39}, \frac{47}{39}, \frac{14}{39})$ (2)三平面交於一線 $(t, \frac{-3}{4} + \frac{-7}{4}t, 3t+2)$

(3)三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點

(練習8)說明下列各方程組所表示的平面相交的情形

$$(1) \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 6x + 3y - 8z = 0 \\ 2x - y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Ans : 三平面相交於一點}(-1, 2, 0)$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 4y - 6z = 7 \\ 3x + 6y + z = 5 \end{cases} \quad \text{Ans : 兩面平行，另一面交兩線}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + 5z = 2 \end{cases} \quad \text{Ans : 三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點}$$

(練習9)試就 a 值討論方程組
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
 的解。

Ans : 若 $a \neq 1, -2$ 時，恰有一解 $(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})$ ；若 $a=1$ ， $(x, y, z) = (s, t, 1-s-t)$

若 $a=-2$ 時，無解。

(丙)空間向量的線性組合

回顧平面向量的線性組合：

「若給定不平行的平面向量 \vec{a} 與 \vec{b} ，則平面上任一向量 \vec{c} 都能唯一表成 \vec{a} 與 \vec{b} 的線性組合。」這個結果，用坐標的語言來描述，可以寫成以下的結果：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ， $\vec{c} = (c_1, c_2)$ ，則 \vec{c} 可以唯一表成 \vec{a} 與 \vec{b} 的線性

組合之充要條件是 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (即 \vec{a} 、 \vec{b} 不平行)。

給定空間向量 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} ，我們稱型如 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ (x, y, z 為實數) 的向量為 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合。

接下來，我們要問：

「 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 要滿足什麼條件，才會使得空間中任一向量 \vec{d} 可以唯一表成 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合？」

給定 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ，則

對於任意向量 $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ ， \vec{d} 可以唯一表成 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合

\Leftrightarrow 可以找到唯一的一組實數 x_0, y_0, z_0 使得 $\vec{d} = x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + z_0\vec{c}$

\Leftrightarrow 可以找到唯一的一組實數 x_0, y_0, z_0 使得

$$(d_1, d_2, d_3) = x_0(a_1, a_2, a_3) + y_0(b_1, b_2, b_3) + z_0(c_1, c_2, c_3)$$

\Leftrightarrow 三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 恰有一組解 (x_0, y_0, z_0) 。

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (即 } \vec{a}、\vec{b} \text{ 與 } \vec{c} \text{ 不共平面)}$$

上面的結果用幾何的觀點來說，當空間中任一向量 \vec{d} 可以唯一表成 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合時，則三向量 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 不共平面；反過來說，當空間中三向量 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 不共平面時，那麼空間中任一向量 \vec{d} 可以唯一表成 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合。

舉例來說，空間坐標中，考慮標準單位向量 $\vec{i} = (1, 0, 0)$ 、 $\vec{j} = (0, 1, 0)$ 、 $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ，顯然這三個向量不共平面，因此空間中任一向量 $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ 都可以唯一表成 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 的線性組合，即 $\vec{d} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$ 的表示法是唯一的。

我們將前面的結果整理如下：

向量線性組合的唯一性

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 與 $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ ，則 \vec{d} 可

以唯一表成 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合之充要條件是 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ (即 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c}

不共平面)。

[例題7] 空間中不共線三相異點 $A(a_1, a_2, a_3)$ 、 $B(b_1, b_2, b_3)$ 、 $C(c_1, c_2, c_3)$ ，

試證明平面 ABC 的方程式為
$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0。$$

(練習10) 試判斷下列各題中， \vec{d} 是否可以唯一表成 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 的線性組合：

(1) $\vec{a} = (1, -2, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, 3, -5)$ 、 $\vec{c} = (-2, -7, 11)$

(2) $\vec{a} = (1, -2, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, 3, -5)$ 、 $\vec{c} = (3, -1, 1)$ 。

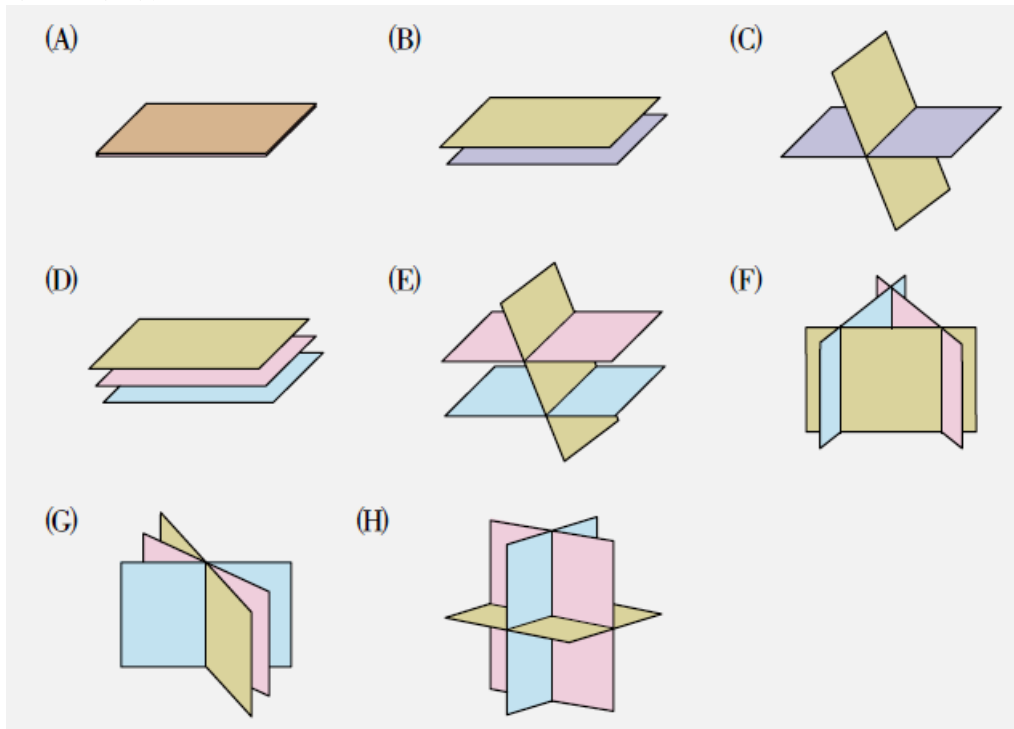
Ans：(1)否 (2)是

(練習11) 設空間中有四點 $A(1, 2, -1)$ 、 $B(0, 3, 4)$ 、 $C(-2, 1, -3)$ 、 $P(x, y, z)$ ，試證明：

點 P 在平面 ABC 上 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 1 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

綜合練習

(1) 請判斷各小題中三平面的關係，並在每個小題之後，填入適當的編號來代表三平面的關係：



(a)
$$\begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ 6x+4y+2z=-4 \\ 2x+5y-z=2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 5x+2y+3z=5 \\ 2x+5y-z=-2 \\ x-3y-2z=13 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 4x+3y+z=2 \\ x+y+z=-1 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 3x+2y-7z=4 \\ 2x+y-5z=2 \\ 5x+3y-12z=0 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+4y-2z=3 \\ 3x-5y-6z=11 \end{cases}$$

(2) 試判別下列各小題中三平面的關係，並求一次方程組的解。

(a)
$$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-7z=7 \\ x+y+z=9 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 3x-7y+5z=13 \\ x-4y+2z=3 \\ 8x-17y+13z=36 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x-8y-5z=-4 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 4x+4y+4z=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

(3) 設 a 為不等於 0 的實數，關於方程式組
$$\begin{cases} ax + y + \frac{z}{a} = 1 \\ x + ay + z = -1 \\ \frac{x}{a} + y + az = 1 \end{cases}$$
 的解，下列選項那些是

正確的？(A)當 $a=3$ 時，無解 (B)當 $a=1$ 時，恰有一組解 (C)當 $a=\frac{1}{2}$ 時，恰有一組解 (D)當 $a=-1$ 時，有無限多組解 (E)當 $a=-4$ 時，有無限多組解。

(4) 若
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -9 \\ ax + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$
 與
$$\begin{cases} 2x + by - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 13 \\ 2x + y - cz = 12 \end{cases}$$
 為同義方程組，且恰有一解，則 $(a, b, c) = ?$

(5) 已知方程組
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 恰有一組解 $(5, -2, 8)$ ，

則方程組
$$\begin{cases} (2a_1 + 3b_1)x + 2b_1y + 3c_1z = d_1 \\ (2a_2 + 3b_2)x + 2b_2y + 3c_2z = d_2 \\ (2a_3 + 3b_3)x + 2b_3y + 3c_3z = d_3 \end{cases}$$
 之解為何？

(6) 若
$$\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3x + ay - z = b \end{cases}$$
 有無限多解，則 (a) $a = ?$ $b = ?$ (b) 方程組的解。

(7) 若 $3x - y + z - 1 = 0$ ， $ax - 2y + 3z + 2 = 0$ ， $2x + by - z - 9 = 0$ 三平面共線，求 a, b 的值。

(8) 齊次方程組：

(a)
$$\begin{cases} 3x - ay = 0 \\ x - 2y = b + 4 \end{cases}$$
 除 $(0, 0)$ 外尚有其他解，則 $a = ?$ $b = ?$

(b)
$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$
 有異於 $(0, 0, 0)$ 的解，則 $a = ?$ 解為何？

(9) 三元一次方程組的幾何意義：

(a) 就 k 值討論下列三平面相交的情形
$$\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x + 5y + z = -1 \\ x + 5y - 7z = k \end{cases}$$

(b) 就 a 值討論下列三平面相交的情形
$$\begin{cases} (1+a)x + 2y - 3z = 0 \\ x + (3+a)y + z = 0 \\ x - 2y + (1-a)z = 0 \end{cases}$$

(10) 一容量為 100 立方公尺的水池，由 A, B 兩水管注水，而由第三水管 C 放水，若三水管盡開，則由滿池至水乾需時 3 小時，若只開 A, C 兩水管，則 1 小時水乾，若只開 B, C 兩水管，則只需 45 分鐘水乾，問：三水管每小時的注（放）水量各多少？

(11) 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買的到。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別是 8、15、21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆與老闆娘有如下的對話：老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」

老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子」

(a) 請問當天白羅包子店淨賺多少錢？

(b) 聰明的你，請幫忙分析當天購買一個、兩個及三個包子的人數各是多少人？

(12) 設 a_1, a_2, \dots, a_{50} 是從 $-1, 0, 1$ 這三個整數中取值的數列。若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$ 且 $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107$ ，則 a_1, a_2, \dots, a_{50} 當中有幾項是 0？

(2003 學科能力測驗)

(13) 一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別釋出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又已知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原質量的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為多少公克。

(2011 年學科能力測驗)

(14) 給定坐標空間，設地球上某一 GPS 接收機之坐標為 (x, y, z) 。在某時刻測得與其中四個衛星 A(-5, 1, 5)、B(9, -6, 4)、C(-3, -9, 7) 與 D(8, 4, -3) 的距離分別為 7, 9, 9, 11 單位，試求 GPS 接收機之坐標。

(15) 設空間坐標中 $\vec{a} = (1, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, 0, 1)$ 、 $\vec{c} = (2, -1, 0)$ ，若 $\vec{u} = (-4, 5, 4)$ 可以表成 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ 的形式，試求實數 x, y, z 。

(16) 設三個相異平面 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 相交於直線 L，點 A(3, 2, 1) 落在 L 上。

現在考慮三元一次聯立方程式： $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \dots (*) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

設 $(x, y, z) = (-2, 4, 5)$ 為 (*) 的一個解，試問下列哪些選項是正確的？

(A) 向量 (3, 2, 1) 為 L 的方向向量

(B) 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(C) $(x, y, z) = (-5, 2, 4)$ 為 (*) 的解

(D) (*) 恰有一組解

(E) (*) 的解可以表為 $(x, y, z) = (-2+3t, 4+2t, 5+t)$ ，其中 t 為實數。

(17) 設坐標平面上三點 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$ ，其中 x_1 、 x_2 、 x_3 互異

(a) 請證明：
$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0。$$

(b) 恰存在一組實數 a, b, c ，使得函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 P_1 、 P_2 、 P_3 三點。

進階問題

(18) $x, y, z, k \in R$ ，且 $|x+y+z-k| + (x-y+z)^2 + (x+3y+z-k-1)^2 = 0$ ，則 $k = ?$

(19) 設 $a, b \in Z$ ，若方程組
$$\begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ x + 2y - 3z = a \\ x + 3y - 4z = b \\ x + 4y - 5z = b^2 \end{cases}$$
 有解，則下列敘述何者正確？

(1) $a = 1$ (2) $b = 2$ (3) $a + b \leq 3$ (4) $x = z - 4$ (5) $y = z + 2$ 。

(20) 輔導室楊老師幫 50 位啦啦隊員訂便當，排骨便當一個 84 元、雞腿便當一個 90 元、素食便當一個 105 元，楊老師一面登記，一面收錢，總共收了 4374 元（楊老師自己不算在內）。楊老師先到菜市場買水果準備招待學生，然後到水果店對面的便當店，她把 4374 元拿給便當店老闆的時候，才發現登記便當的那張紙不見了，她跟老闆說：「我只記得確定有人訂素食便當，但是絕對不會超過三個。至於雞腿幾個？排骨幾個？我記不得了，總共 50 個沒錯。」設訂素食的有 x 個、訂雞腿的有 y 個、訂排骨的有 z 個，則數組 (x, y, z) 之值為_____。

(21) 就 a 值討論下列四平面相交的情形
$$\begin{cases} 3x + 5y - z = -1 \\ x - y + 4z = 11 \\ x + 7y - 9z = -23 \\ 4x + 20y - 23z = a \end{cases}$$

(22) 已知 a, b, c 為相異實數，試求方程組
$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = ab + bc + ca \\ bx + cy + az = ab + bc + ca \end{cases}$$
 的解。

(23) 已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長 a, b, c 成等差數列，又滿足

$5a + 4b - 5c = 0$ ，求 $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - bc}{ab + bc - 2ca}$ 之值。

綜合練習解答

(1) (a)(C) (b)(H) (c)(G) (d)(F) (e)(E)

(2) (a)三平面恰交於一點(6,2,1)

(b)三平面交於一直線，解
$$\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad t \text{ 為實數。}$$

(c)三平面相交於一直線，無限多解

(d)兩平面平行，另一平面與兩平行平面交於平行兩直線，無解。

(3) (C)(D)

(4) (1,0,-3)

(5) $(\frac{5}{2}, \frac{-19}{4}, \frac{8}{3})$

(6) (a) $a=1, b=4$ (b) $x=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}t, y=\frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}t, z=t$

(7) $a=\frac{13}{2}, b=-1$

(8) (a) $a=6, b=-4$ (b) $a=3$ 解為 $(-t, -18t, 13t)$

(9) (a) $k=-18$ 時，共線； $k \neq -18$ 時，三平面各交一線，三線平行。

(b) 當 $a \neq -2$ 且 $a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$ 時， E_1, E_2, E_3 交於一點(0,0,0)；當 $a = -2$ 時，

E_1 與 E_3 重合且與 E_2 交於一直線； $a = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$ 時， E_1, E_2 與 E_3 交於一直線。

(10) 每小時 A, B 水管分別注水 100, $\frac{200}{3}$ 立方公尺，

C 水管放水 200 立方公尺

(11) (a)2200 分錢 (b)買一個包子有 95 人，買二個包子有 107 人，買三個包子有 230 人

(12) 11

(13) A、B、C 物質之質量分別為 4、1、2 公克。

(14) (1,-2,3)

(15) $x=2, y=4, z=-3$

(16) (A)(B)(C)(E)

[提示：三平面
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad \text{經過平移可得}$$

三平面
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \text{，而交線的方向向量不變。]$$

(17) [提示：(a)
$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = -(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)。$$
 (b)若函數 $y=ax^2+bx+c$

的圖形通過 P_1 、 P_2 、 P_3 三點 $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$ 即 (a,b,c) 為方程組

$$\begin{cases} x_1^2 u + x_1 v + 1 \cdot w = y_1 \\ x_2^2 u + x_2 v + 1 \cdot w = y_2 \\ x_3^2 u + x_3 v + 1 \cdot w = y_3 \end{cases} \text{的解，因為} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 此方程組恰有一解。}$$

(18) $k=1$

(19) (2)(3)(4)(5)

(20) (2,22,26)

(21) $a=-58$ 時，共線； $a \neq -58$ 時，前三平面的交線與第四平面平行

[提示：先考慮前三個平面的相交狀況，結果為三平面交於一直線，將此直線的參數式代入 $4x+20y-23z$ ，得到值 58，所以 $a=-58$ 時，共線； $a \neq -58$ 時，前三平面的交線與第四平面平行]

(22) (c,a,b)

(23) 6