第二章　空間中的平面與直線

§2–1 平面方程式

第一章中利用空間坐標系，把空間向量用坐標表示。並且討論了空間中基本要素點、直線、平面的基本概念，以及它們之間的關係。

本章則是透過空間向量，將空間中直線與平面的基本概念轉化成代數方程式加以探討。本章的核心內容大致上分成兩類：

(1)空間坐標中平面與直線的表示方式：平面方程式、直線的參數式與比例式。

(2 利用方程式來討論點、直線與平面間的關係：

　當它們有交點或交線時，求得交點、交線與交角；

　當它們沒有交點時，就求它們的距離。

(甲)平面方程式

◆　平面的法向量

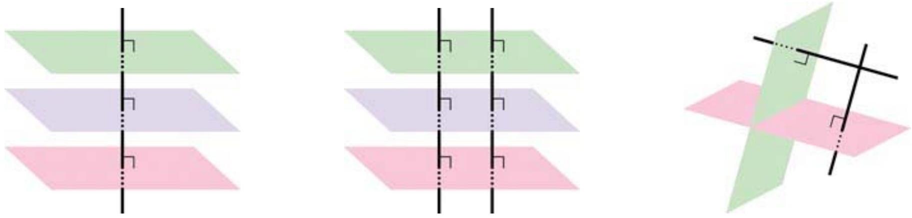
根據第一章空間概念的探討，可以得知：

如圖(a)：垂直於一直線的平面都會平行

如圖(b)：一系列平行平面的垂線都會平行

如圖(c)：相交於一直線的兩平面，它們的垂線都不會平行。

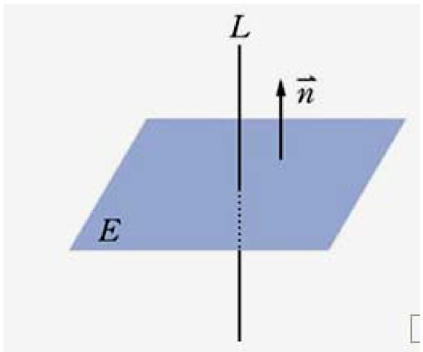
因此一個平面的“傾斜程度”，是以其垂線的方向為指標。



(a)　　　　　(b)　　　　　(c)

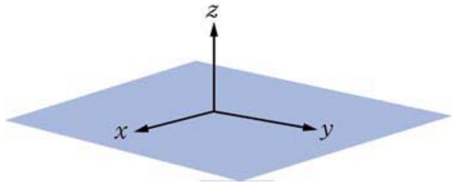
(1)平面的法向量：

仿照坐標平面上直線法向量的定義，在空間中的直線上，任取兩相異點，它們所形成的向量亦可定為此直線的方向向量，因此可用平面垂線的方向向量來描述其“傾斜程度”，我們定義平面的法向量如下：

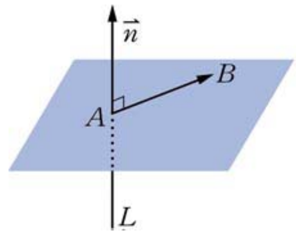


平面的法向量： 給定一個平面 E，其垂線 L 的方向向量定義為平面 E 的法向量 $\vec{n}$ 。

觀察空間坐標系中的 xy 平面，因為 z 軸垂直 xy 平面，根據平面法向量的定義，向量（0，0，1）與（0，0，−2）都是 z 軸這條直線的方向向量，因此它們都是 xy 平面的法向量。

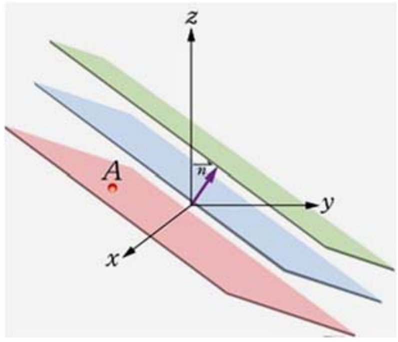


(2)法向量的性質：
根據平面法向量的定義，可以得到以下兩個性質：



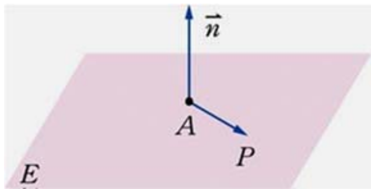
(1°) 設 $\vec{n}$ 為平面 E 的法向量，那麼 $k\vec{n}$ （$k\neq 0$），
都是該平面的法向量。
(2°) 平面 E 上的任一向量垂直於該平面法向量。

◆ 平面的方程式
給定非零的空間向量$\vec{n}$，以$\vec{n}$為法向量的平面很多，它們都會互相平行，如右圖，若指定平面需通過定點 A 時，這樣的平面就被唯一確定了。
換句話說，「**以$\vec{n}$為法向量，且過 A 點的平面只有一個。**」



[例題1] 求通過點 $A(-2,3,-4)$ 且以$\vec{n}=(3,2,-1)$為法向量的平面方程式。
[解法]：
$P(x,y,z)$ 在所求平面上
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$
$\Leftrightarrow\ (x+2,y-3,z+4)\cdot(3,2,-1)=0$
$\Leftrightarrow\ 3(x+2)+2(y-3)+(-1)(z+4)=0$，
即 $3x+6+2y-6-z-4=0$，整理得 $3x+2y-z=4$。

(1)點法式：
若平面 E 法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$ 且過點 $A(x_0,y_0,z_0)$，則平面 E 的方程式為 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。
[證明]：



在平面 E 上任取一點 P 其坐標為(x,y,z)，則$\overrightarrow{\mathbf{AP}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}$
所以$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$
$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
反過來說滿足方程式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 的解 $Q(x,y,z)$
$\Rightarrow\overrightarrow{\mathbf{AQ}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}\Rightarrow$Q 落在平面 E 上。
(2)一般式：
將方程式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 化簡可得 $ax+by+cz+d=0$ 的方程式。
我們將 $ax+by+cz+d=0$ 稱為一般式。
一般式 $ax+by+cz+d=0$ 的法向量為 $\vec{n}=(a,b,c)$
[證明]：
設 $A(m,n,l)$、$B(p,q,r)$在平面 $ax+by+cz+d=0$ 上，

驗證$\overrightarrow{AB}\cdot(a,b,c)=(p-m,q-n,r-l)\cdot(a,b,c)$
$=a(p-m)+b(q-n)+c(r-l)=ap+bq+cr-(am+bn+cl)=0$
故$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}$ 因此 $ax+by+cz+d=0$ 的法向量為$\vec{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$。

結論：

(a)**掌握法向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$，平面上的一點 P，即可用點法式去表示平面方程式：**

(b)平面 E 的 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$且過 $P(x_0,y_0,z_0)$，E 的點法式為 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(c)平面 E 的方程式為 $ax+by+cz+d=0$，則法向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$為 E 的一個法向量。

(**練習**1) 試找出下列各平面的法向量：

(1) $2x-3y+5z-10=0$。　(2) $2x+z=6$。　(3) $x=2$。

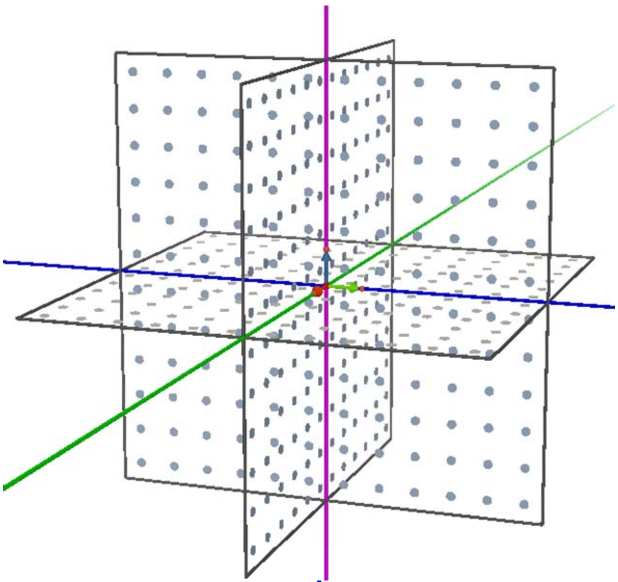
Ans：(1)(2,−3,5)　(2)(2,0,2)　(3)(1,0,0)

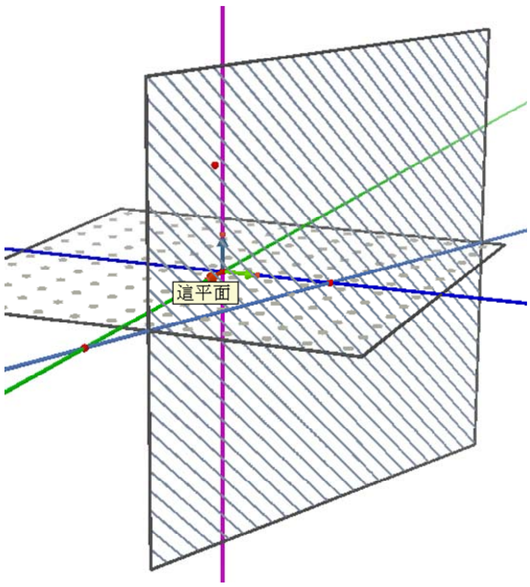
[問題與討論]：

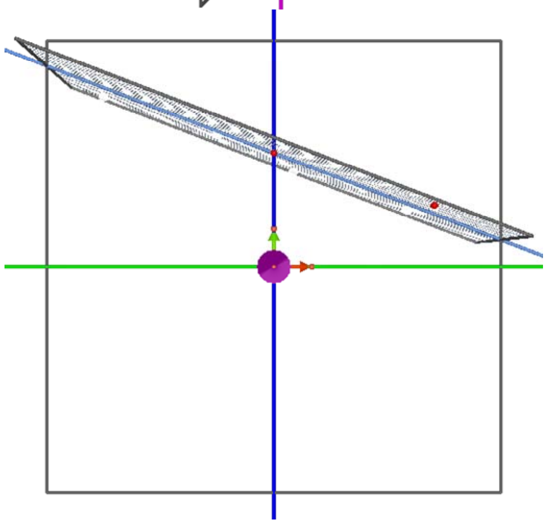
(a)特殊平面的方程式如何表示：

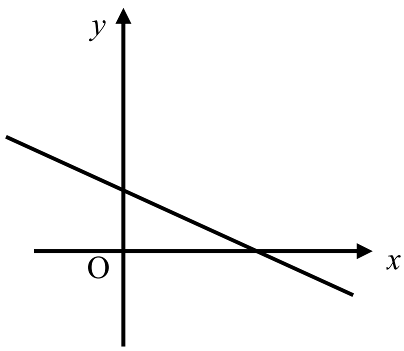
xy 平面：　　　*yz* 平面：　　　*zx* 平面：

(b)如何去決定方程式 $2x+3y-6=0$ 的圖形。



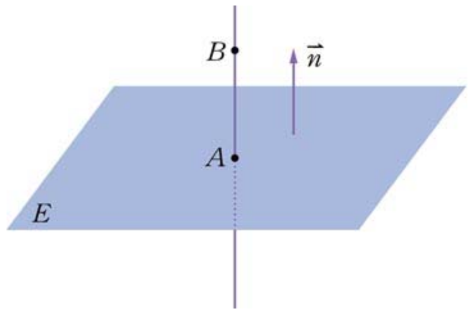






[例題2] 坐標空間中，設點 B (5，−2，6) 關於平面 E 的投影點為 A (4，2，−1)，試求平面 E 的方程式。

Ans：$x-4y+7z+11=0$



(3)平面上不共線三點求平面方程式：

空間中恰有一個平面會通過不共線的三點，因此在空間坐標中，給定不共線三點的坐標，就可以求得通過這三點的平面方程式。

從一個例子說起：

設 A(3，−1,1)、B(4,2,−1)、C(7,0,3)，求過 A、B、C 三點的平面方程式。

[分析]：

要求平面 ABC 的方程式，首先要求得法向量$\vec{n}$，根據法向量的性質，可以在平面 ABC 上找兩個已知向量，$\vec{n}$都與其垂直，利用外積的定義來決定$\vec{n}$，然後再找一點，就可以求得方程式。

[解法]：

設平面的一個法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$、$\overrightarrow{AC}=(4,1,2)\Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$，故 $\vec{n}$ 為 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的公垂向量

因為$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{AB}$，$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{AC}$，因此 $\vec{n}\,//\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,-10,-11)$

故可以取 $\vec{n}=(8,-10,-11)$，所求平面為 $8(x-3)-10(y+1)-11(z-1)=0$。

公垂向量的求法：

由前面的例子中，已知空間中兩個不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，因為

$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$ 且 $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$ ，所以與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 平行的向量 $\vec{c}$ ，會使得 $\vec{a}\perp\vec{c}$ 且 $\vec{b}\perp\vec{c}$ 。故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的公垂向量為 $k(\vec{a}\times\vec{b})$，$k\neq0$。

[例題3] 設平面 E 的 x,y,z 截距分別為 a,b,c，其中 $abc\neq0$，試求平面 E 的方程式。

[分析]：

平面 E 的 x,y,z 截距分別為 $a,b,c \Leftrightarrow (a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$三點在平面 E 上

[解法]：

(練習2) 求過點 P(2,−3,1)且法向量 $\vec{n}$ =(2,−3,4)的平面方程式。
Ans：$2x-3y+4z=17$

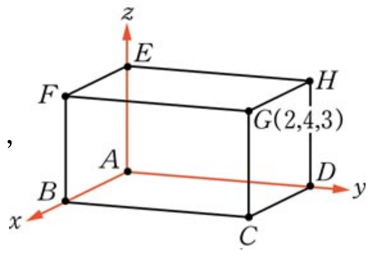
(練習3) 在空間中，連接點 P(2,1,3)與點 Q(4,5,5)的線段$\overline{PQ}$之垂直平分面。
Ans：$x+2y+z-13=0$

(練習4) 設 P、Q 為平面 E：$ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且$\overrightarrow{PQ}=(x_0, y_0, z_0)$，
則$\overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)$為何？
(A)不定值，隨(x_0, y_0, z_0)而改變。(B)25 (C)5 (D)0 (E)−1。Ans：(D)

(練習5) 平面 E 在 x,y,z 軸的截距為 2，−1，3，試求平面 E 的方程式。
Ans：$3x-6y+2z=6$

(練習6) 若 A(1,2,1)、B(0,−1,1)、C(−1,0,0)、D(4,3,k)，試求：
(1)平面 ABC 的方程式。
(2)若 A、B、C、D 四點共面，則 k=？
Ans：(1)$3x-y-4z=-3$　(2)$k=3$

(練習7) 如圖，將長方體 ABCD－EFGH 置於一個坐標空間中，其中 A 為原點，B，D，E 分別落在 x，y，z 軸的正向，已知 G (2，4，3)，試求平面 BDE 的方程式。
Ans：$6x+3y+4z=12$



(練習8) 一平面與平面 $3x+2y+z+11=0$ 平行，且與三軸之截距和為 22，試求其方程式。Ans：$3x+2y+z-12=0$
注意：截距不是距離，是圖形與坐標軸交點之坐標值。

(練習9) 平面過 G(−1,2−3)且此點恰為平面在 x,y,z 軸上截點所成三角形之重心，求此平面方程式。　Ans：$6x-3y+2z+18=0$

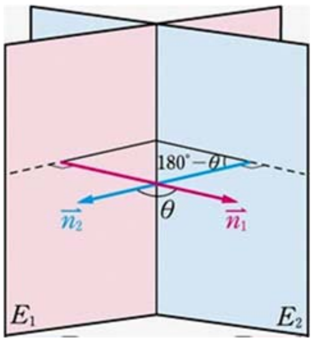
(練習10) 平面 E 之法向量為(3,−2,1)，且三截距和為 13，求 E 的方程式。
Ans：$15x-10y+5z-78=0$

(乙)兩平面的交角

在坐標空間中，若已知平面 E_1，E_2 的方程式，如同坐標平面上的兩直線求交角的想法，也可以利用法向量求 E_1 與 E_2 的交角。

設 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 為空間中相交於一直線的兩平面，它們會有四個二面角，我們稱為**兩平面的交角**，其中一組對應相等，一組則為另一組的補角。

取 $\overrightarrow{n_1}=(a_1, b_1, c_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(a_2, b_2, c_2)$ 分別為平面 E_1 與 E_2 的法向量，設 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 的夾角為 θ，由右圖，可以看出 $\overrightarrow{n_1}$ 和 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角等於平面 E_1 與 E_2 的一個交角，因此 E_1，E_2 的交角為 θ 與 $180°-\theta$。



根據前面的分析，當兩平面垂直時，交角等於 90°，此時法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 和 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角亦等於 90°，故法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 和 $\overrightarrow{n_2}$ 互相垂直。

反之亦然，因此可以得到以下結論：

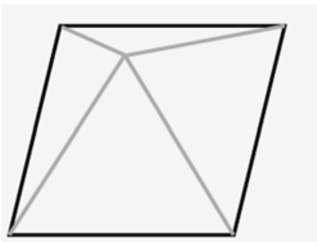
兩平面垂直的充要條件是兩平面的法向量垂直。

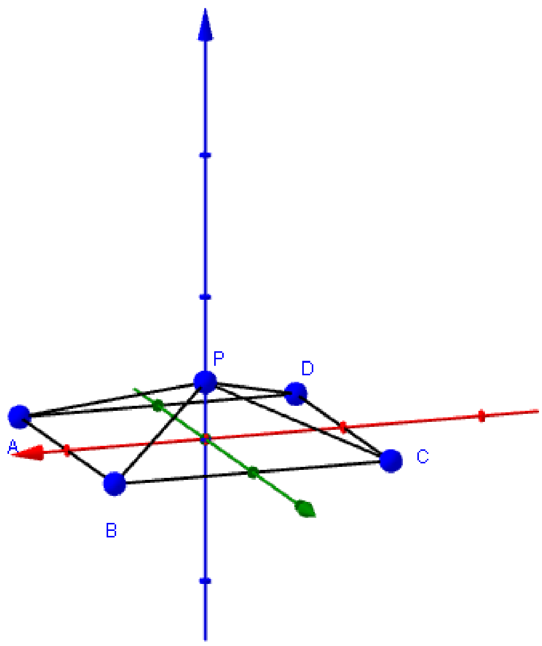
[例題4] 求兩平面 E_1：$x+2y+3z=7$，E_2：$2x-3y-z=5$ 的交角。求法向量的夾角，求得兩平面的交角。

[解法]：

[例題5] 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角的正切值 tanθ 。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$ ，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為__________。（ 化為最簡分數）

(2015 學科能力測驗)　Ans：$\frac{25}{29}$





(練習11) 設α為平面 $2x+y-z=4$ 與 xy 平面之夾角，則 sinα=？ Ans：$\frac{\sqrt{30}}{6}$

(4)求平面方程式的要點：求法向量與一點

[例題6] 求過點 P(1,1,1)且垂直平面 $3x+y-z+1=0$ 與 $4x-2y-z-5=0$ 之平面方程式。
Ans：$3(x-1)+(y-1)+10(z-1)=0$

[例題7] 試求過點 A(2,1,−1)、B(1,1,2)二點且與平面 $7x+4y-4z=0$ 垂直之平面的方程式。
Ans：$12x-17y+4z-3=0$

(練習12) 試求過點 A(2,1,−1)、B(1,1,2)二點且與平面 $7x+4y-4z=0$ 垂直之平面的方程式。Ans：$12x-17y+4z-3=0$

(練習13) 設一平面 E 包含點 A(2,3,1)及點 B(3,−1,0)，且平面 E 和 z 軸平行，求平面 E 的方程式，此平面方程式有何特徵？
Ans：$4x+y-11=0$，缺 z 項，和 z 軸平行。

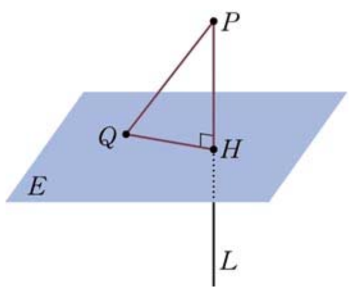
(練習14) 求下列各平面方程式：
(1)平行 xy 平面，且在其上 5 單位長之平面。Ans：$z=5$
(2)平行於 z 軸，且 x 軸截距為 3，y 軸截距為 4 之平面。Ans：$4x+3y-12=0$

(練習15) 過點 A(1,2,3)與 yz 平面平行之平面方程式。Ans：$x=1$

(丙)點到平面的距離

如同平面上求點到直線距離之想法。在空間中，設 P 點在平面 E 外，P 點到平面 E 的距離就是 **P 點與平面 E 上各點的連線段長之最小值**。那麼如何求 P 點到平面 E 的距離呢？

過 P 點對平面作垂線 L，垂線 L 與平面 E 交於一點 H，即 H 點為 P 點對平面 E 的投影點，設 Q 點為平面 E 上異於 H 點的任意點，則$\triangle PHQ$ 為直角三角形，其中 $\overline{PQ}$ 為斜邊，故 $\overline{PQ}>\overline{PH}$。因此 P 點與平面 E 上任一點所作的連線段中，以 $\overline{PH}$ 的長度最短。



故 **P** 點到平面 **E** 的距離等於 **P** 點與投影點 **H** 的距離。

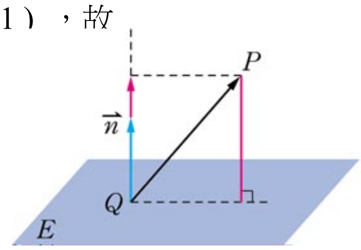
[例題8] 求點 $P(5，-2，-4)$ 到平面 $E：3x+2y+z-21=0$ 的距離。

[分析]：

設 $Q(x_1，y_1，z_1)$ 為平面 E 上任一點，P 點到平面 E 的距離 D 等於 $\overrightarrow{QP}$ 在 $\vec{n}$ 上正射影的長度。

[解法]：

已知 $\overrightarrow{QP}=(5-x_1，-2-y_1，-4-z_1)$，$\vec{n}=(3，2，1)$，故



$$D=\left|\overrightarrow{QP}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|}\right|$$

$$=\frac{|3(5-x_1)+2(-2-y_1)+1(-4-z_1)|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|7-3x_1-2y_1-z_1|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{|7-21|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\sqrt{14}。$$

（因 $Q(x_1，y_1，z_1)$ 在平面 E 上，故 $-3x_1-2y_1-z_1=-21$，）

(1)推導點到平面的距離公式：

設點 $P(x_0，y_0，z_0)$ 為平面 $E：ax+by+cz+d=0$ 外一點，如何求 P 點到平面 E 的距離呢？

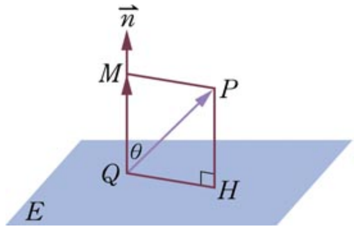
利用正射影的觀念，仿照平面上點到直線距離的求法，求點到平面的距離。

設 $Q(x_1，y_1，z_1)$ 為平面 E 上任一點，

如右圖，可知 $\overrightarrow{QP}$ 在 $\vec{n}$ 上正射影的長度，

即為 P 點到平面 E 的距離，

即 $\overline{PH}=\overline{QM}$ （$=\overrightarrow{QP}$ 在 $\vec{n}$ 上的正射影長度）。



因為 $\vec{n}=(a，b，c)$，$\overrightarrow{QP}=(x_0-x_1，y_0-y_1，z_0-z_1)$，

故 $\overrightarrow{QP}$ 在 $\vec{n}$ 上的正射影長度為

$$\left||\overrightarrow{QP}|\cos\theta\right|=\left|\overrightarrow{QP}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|}\right|$$

$$=\left|\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|。$$

又因為 $Q(x_1，y_1，z_1)$ 在平面 E 上，所以 $-ax_1-by_1-cz_1=d$，

故 $P(x_0，y_0，z_0)$ 到平面 $E：ax+by+cz+d=0$ 的距離為

$$\left|\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}。$$

當 $P(x_0，y_0，z_0)$ 在平面 E 上時，P 點到平面 E 的距離為 0，而

$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 也會等於 0。

因此可以得到點到平面的距離公式如下：

點 $A(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 E：$ax+by+cz+d=0$ 的距離為 $d(A,E)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

[例題9] 設 P(x,y,z)為平面 E：$x-2y-2z+3=0$ 的點，則$(x-6)^2+y^2+z^2$ 的最小值為？
Ans：9

[例題10] 設兩平行平面 E_1：$ax+by+cz+d_1=0$，E_2：$ax+by+cz+d_2=0$
證明：兩平面 E_1、E_2 的距離 $d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

[例題11] 平面 E_1：$7x-y+2z+10=0$，E_2：$4x+4y-8z+3=0$，求 E_1 及 E_2 所夾二面角之平分面方程式。Ans：$16x-16y+32z+31=0$ 或 $40x+8y-16z+49=0$

(練習16) 求點 A(5,0,8)到平面 E：$2x-y+2z+1=0$ 的距離。 Ans：9

(練習17) 求兩平行面 E_1：$2x+2y+z-7=0$ 與 E_2：$4x+4y+2z-1=0$ 的距離。Ans：$\dfrac{13}{6}$

(練習18) 求與平面 $2x-y-2z+3=0$ 平行且與其距離為 1 的平面方程式。
Ans：$2x-y-2z=0$ 或 $2x-y-2z+6=0$

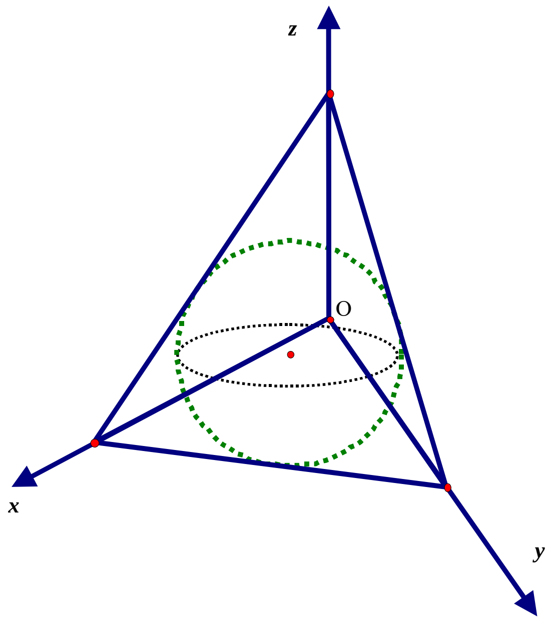
(練習19) 空間中，設 A$(-1,3,3)$、B$(1,3,4)$、C$(3,-5,-5)$、D$(2,2,7)$，則四面體 ABCD 中，以 ABC 為底面時，高為何？ Ans：$\sqrt{5}$

(練習20) 設空間坐標中有兩點 A(1,2−3)、B(1,−1,0)，平面 E：$x+y-2z+3=0$，若直線 AB 與平面 E 交於 P 點，試求$\overline{AP}$：$\overline{BP}$。　Ans：4：1

◆ 補充問題：

[例題12] 求過點 A(1,0,0)、B$(0,0,\frac{1}{3})$二點，且與平面 $x+z=3$ 之交角為 45°的平面方程式。
Ans：$x\pm\sqrt{6}\ y+3z-1=0$

[例題13] 空間中四平面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 與 $x+y+z=1$ 圍成一個四面體，試求此四面體之內切球半徑 r。　Ans：$\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$



(練習21) 平面 E 過點 A(1,−1,1)、B(−1,3,1)且與平面 $x+y+1=0$ 之一交角為 45°，求 E 的方程式。　Ans：$2x+y+2z-3=0$，$2x+y-2z+1=0$

(練習22) 空間中四平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 2z = 1$ 圍成一個四面體，試求此四面體之內切球的半徑 r 之值為何？$\frac{1}{8}$

綜合練習

(1) 設平面 E 之方程式為 $ax+by+cz+d=0$，其中 a, b, c, d 為實數，且 a, b, c 不全為 0，求下列敘述何者正確?

(1)若原點在 E 上，則 $d=0$

(2)若 $a=0$，則平面 E 與 $y\,z$ 平面垂直

(3)若 $b=0$，則 E 與 $x\,z$ 平面平行

(4)若 $b=c=0$，則 E 垂直於 $y\,z$ 平面

(5)若 E 與 $x\,y$ 平面平行，則 $a=b=0$，$d\neq 0$。

(2) 試求下列諸平面的方程式：

(a)過點$(-1,3,2)$，法向量為$(-4,1,3)$。

(b)過三點$(2,7,3)$、$(4,6,2)$、$(5,6,1)$。

(c)設三點 $P(2,1,-1)$, $Q(3,-2,1)$, $R(1, 1, 2)$，其中直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 垂直此平面且 R 點到此平面的距離為 $2\sqrt{14}$ 。

(d)與 $4x-2y-z-5=0$、$3x+y-z+1=0$ 二平面均垂直且通過點 P(1,1,1)。

(e)點(1,2,3)在此平面上的投影點為(2,3,4)。

(3) 空間坐標中，平面 E：$2x-y=2$ 上有 A(2,2,2)與 B(1,0,0)兩點已知原點 O 在直線 AB 與 E 上的投影點分別為 H、K，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot(2,-1,0)=0$　(2) $\overrightarrow{OH}\cdot(2,-1,0)=0$

(3) $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　(4) $\overrightarrow{OK}\cdot(2,-1,0)=0$　(5) $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{KH}=0$。

(4) 若 A(1,2,1)、B(0,−1,1)、C(−1,0,0)、D(4,3,k)，試求

(a)ΔABC 的面積　(b)A、B、C 三點所決定之平面方程式　(c)若 A、B、C、D 四點共平面，求 k=？

(5) 平面 E_1：$x-2y+2z-5=0$，E_2：$2x+y-2z+3=0$，求 E_1、E_2 所夾二面角之平分面方程式。

(6) 設ΔABC 的三頂點分別為 A(−2,7,15)、B(1,16,3)、C(10,7,3)。

(a)試求通過 A、B、C 三點的平面方程式。(b)試求ΔABC 的外心坐標。

(2006 指定甲)

(7) 設 A(0，1，2)，B(－1，0，3)，C(1，2，3)，

(a)求通過 A，B，C 三點的平面方程式。(b)求ΔABC 的垂心坐標。

(8) 空間中兩點 $A(-2,5, 4)$, $B(1,4 ,-5)$，平面 E：$2x-y+2z+4=0$，若直線 AB 與平面 E 交於 P 點，求線段比 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ 。

(9) 設 A(2,0,0)、B(0,8,0)、C(0,0,1)、D(1,4,9)為空間中四點，求四面體 ABCD 體積。

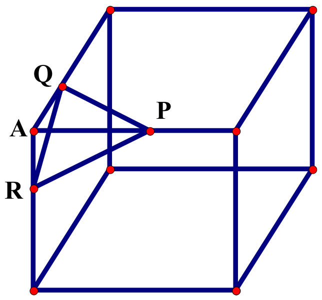
(10) 一平面 E 與平面 $x-3y+12z-5=0$ 平行，且與三坐標平面所圍成的四面體的體積為 1，求 E 的方程式。

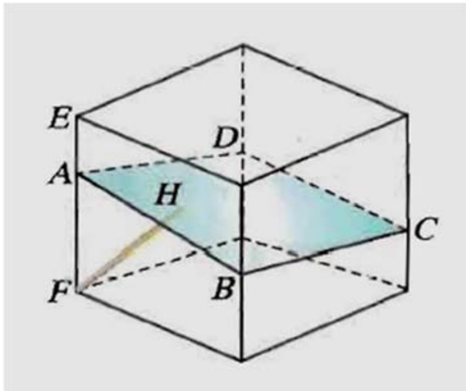
(11) 若兩平行平面 $x-2y+2z-1=0$ 與 $x-2y+2z+k=0$ 的距離為 7，求 k 值。

(12) 已知平面 E_1：$2x+y+3z-6=0$, E_2：$(a-1)x+2y+(b-2)z+11=0$，若 E_1 平行 E_2，則數對(a, b)之值為何？

(13) 若 $P(x_0,y_0,z_0)$為 $x-2y+2z-5=9$ 上一點，求$\sqrt{(x_0+5)^2+(y_0-1)^2+(z_0+3)^2}$ 的最小值=？

(14) 有一個邊長為 5 公尺的正立方體木塊，一位雕塑家想要作一件藝術品，他拿鋸子沿 P、Q、R 三點鋸下四面體 APQR，剩下的木塊以截面 PQR 為底放在地上，已知$\overline{AP}=4$ 公尺，$\overline{AQ}=\overline{AR}=2$ 公尺，請問這一件藝術品的高度為多少公尺？





(15) 如圖，有一邊長 30 公分的正立方體，在其中置入一面鏡子 ABCD，其中 B、D 分別為稜的中點，$\overline{EA}$：$\overline{AF}=1:2$，若由 F 立一個垂直鏡面支柱$\overline{FH}$撐注鏡子，求$\overline{FH}$長度。

進階問題

(16) 試求下列平面的方程式：
(a)過 $x+y-z+2=0$、$x+z-3=0$ 二平面的交線且過點$(0,0,2)$。
(b)過 $A(-1,3,1)$、$B(1,-1,1)$二點且與平面 $x+y-6=0$ 之一交角為 $135°$。
(c)與平面 $x+y-z-1=0$、$x+2y+z-3=0$ 均垂直，且與三坐標軸截距和為 13。

(17) 平面 E 過點 $P(2,3,4)$，且分別交 x,y,z 三軸正向於 A、B、C 三點，O 為原點，(a)求四面體 OABC 的最小體積。(b)此時平面 ABC 之方程式為何？

(18) 設二平面 E_1：$x+ky+z-2=0$ 與 E_2：$x+\sqrt{2}\,y-z+1=0$ 的夾角為 $60°$，求 k 之值。

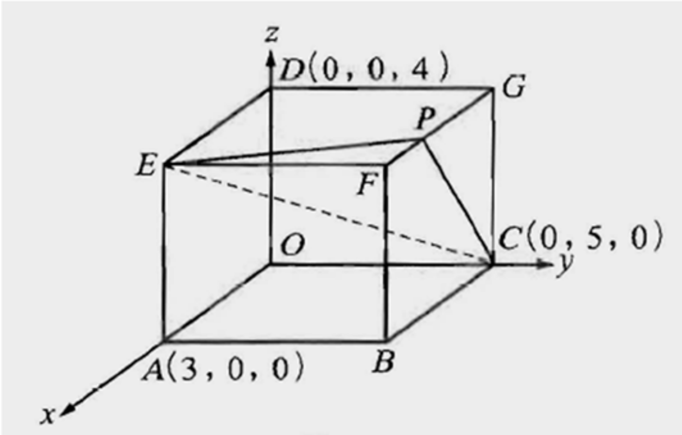
(19) 空間中有五個平面 E_1：$x-2y+6=0$, E_2：$7x-2y-18=0$, E_3：$x+y=0$, E_4：$z=-2$, E_5：$z=2$，若一個五面體的各面分別在 E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 等五個平面上，求此五面體的體積。

(20) 若平面 E 與三坐標軸的截距分別為 a,b,c 且 $abc\neq 0$，若 d 為原點到平面 E 的距離，試證：$\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$。

(21) 如圖所示，OABC−DEFG 是一長方體，其中一些頂點坐標 A(3,0,0)、C(0,5,0)、D(0,0,4)，試求

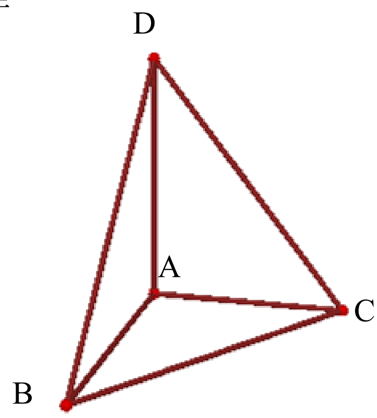
(a)B、E、G 三點所決定的平面方程式。

(b)設 P 是線段 FG 上一點，欲使ΔCEP 的周長最小，求點 P 的坐標。



(22) 如右圖，四面體 ABCD 中，∠BAC、∠CAD、∠BAD 都是直角。若用 S_{ABC} 表示ΔABC 的面積，試證明：直四面體的畢氏定理：

$S_{BCD}^2=S_{ABC}^2+S_{ACD}^2+S_{ABD}^2$。



綜合練習解答

(1)(1)(2)(5)

(2)(a)$4x-y-3z+13=0$ (b)$x+y+z-12=0$(c)$x-3y+2z-30=0$ 或 $x-3y+2z+26=0$
(d) $3x+y+10z-14=0$ (e)$x+y+z-9=0$

(3)(1)(3)(5)

(4)(a)$\frac{\sqrt{26}}{2}$　(b)$3x-y-4z+3=0$　(c)$k=3$

(5)$x+3y-4z+8=0$ 或 $3x-y-2=0$

(6)(a)$x+y+z-20=0$　　　(b)(3,9,8)

[解法]：設外心 $O(a,b,c)$，$\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$且 O 在平面 ABC 上

$\therefore (a+2)^2+(b-7)^2+(c-15)^2=(a-1)^2+(b-16)^2+(c-3)^2$

$(a-1)^2+(b-16)^2+(c-3)^2=(a-10)^2+(b-7)^2+(c-3)^2$

$a+b+c-20=0$，上面三式整理成：$a+3b-4c=-2$，$a-b=-6$，$a+b+c=20$
聯立解得 $a=3$，$b=9$，$c=8$。

(7)(a) $x-y+1=0$(b) $H(0，1，1)$
[提示：令 $H(x,y,z)$，利用$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，H 在平面 ABC 上，找出 x,y,z 的方程式，再解 x,y,z。]

(8)3：8

(9)24 [提示：找出平面 ABC 的方程式，再求 D 點到平面 ABC 的距離，再利用四面體 ABCD 的體積$=\frac{1}{3}\times$(ΔABC 的面積)$\times$高]

(10)$x-3y+12z=\pm 6$

[提示：可令所求方程式為 $x-3y+12z=k \Rightarrow x,y,z$ 軸的截距為 $k,\frac{k}{-3},\frac{k}{12}$

$\Rightarrow \frac{1}{6}|k\cdot\frac{k}{3}\cdot\frac{k}{12}|=1$]

(11)$k=20$ 或-22

(12)(5,8)

(13)6 [提示：將$\sqrt{(x_0+5)^2+(y_0-1)^2+(z_0+3)^2}$ 視為$\overline{AP}$，其中 $A(-5,1,-3)$]

(14)7 公尺

(15)$\frac{60\sqrt{38}}{19}$

(16) (a)$x+y-z+2=0$ (b)$2x+y-2z+1=0$ 或 $2x+y+2z-3=0$ (c)$15x-10y+5z-78=0$

(17)(a)108 (b)$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{12}=1$[提示：設平面方程式為$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ，因為平面過 P 點

$\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$(其中 a,b,c 均為正數)，四面體 OABC 的體積 $V=\frac{1}{6}abc$，$1=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}$

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}\cdot\frac{4}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{4}{V}}\Rightarrow V\geq 108$，等號成立時 $\Leftrightarrow\frac{2}{a}=\frac{3}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=6$，$b=9,c=12$]

(18)$\pm\sqrt{2}$ [提示：$\vec{n_1}=(1,k,1)$，$\vec{n_2}=(1,\sqrt{2},-1)\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$]

(19)72

(20)略

(21)(a)$20x+12y+15z=120$ (b)$(\frac{4}{3},5,4)$

[提示：令 $P(t,5,4)$，$\overline{PE}+\overline{PC}=\sqrt{(t-3)^2+5^2}+\sqrt{t^2+4^2}$ 可以視為坐標平面上點 $(t,0)$到 $M(3,5)$、$(0,4)$距離和的最小值。]

(22)設定坐標系如圖所示，令 $A(0,0,0)$、$B(m,0,0)$、$C(0,n,0)$、$D(0,0,l)$
直接計算各三角形的面積。