§3−3 面積與二階行列式

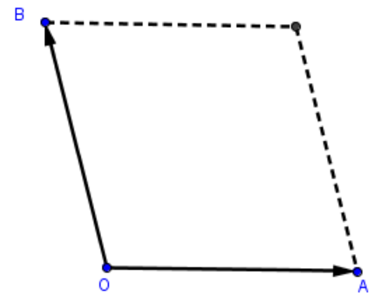
(甲)三角形面積

(1)向量內積與平行四邊形面積：

設 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為非平行的兩向量，則由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

證明：設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 向量的夾角為θ，

則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積



$=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$

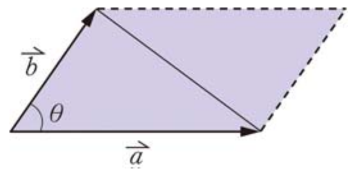
$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

結論：

(a)由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 張成的平行四邊形面積為 $\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

(b)由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 張成的三角形面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

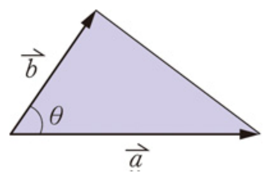
(c)ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ 。



(2)平行四邊形面積的坐標形式

設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$為平面上兩個向量，

由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 張成的平行四邊形面積



$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$

$=|a_1b_2-a_2b_1|$

[例題1] 設 $A(3，2)$，$B(5，1)$，$C(4，-3)$，求△ABC 的面積。

分析：先求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，則以$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$為兩邊的三角形，就是△ABC。

[解法]：

$\overrightarrow{AB}=(2，-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-5)$，

△ABC 即為以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$為兩邊的三角形，故其面積為

$S=\frac{1}{2}|2\times(-5)-(-1)\times1|=\frac{9}{2}$ 。

(練習1) 設 $A(-4，3)$，$B(2，5)$，$C(0，-3)$，求△ABC 的面積。

Ans：22

(練習2) 求以 $\vec{a}=(2，4)$，$\vec{b}=(3，-1)$ 為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

Ans：14

(乙)二階行列式

(1)定義二階行列式

介紹二階行列式之前，我們先來觀察討論下面兩個例子：

例一：解二元一次方程組

解二元一次方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots(2) \end{cases}$，其中 x,y 是未知數，

我們使用代入消去法解之

$(1)\times b_2-(2)\times b_1 \Rightarrow (a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1)$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1 \Rightarrow (a_2b_1-a_1b_2)y=(c_1a_2-c_2a_1)$

當 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時，解得唯一解：$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$。

例二：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$為平面上兩個向量，

由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 張成的平行四邊形面積=$\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}=|a_1b_2-a_2b_1|$

根據前的討論，我們可以得到一個模式，有兩組數 a_1、b_1 與 a_2、b_2 它們交叉乘再相減 $a_1b_2-a_2b_1$ 分別代表解方程組中會不會有解的條件或是平行四邊形的面積。數學上將這樣的模式稱為**二階行列式**。

(a)二階行列式的定義：

當 a,b,c,d 為 4 個數，定義二階行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

(它是左上與右下的乘積減去右上與左下的乘積)

符號$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$中，$(a,b)$與$(c,d)$稱為第一列、第二列；

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$與$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$稱為第一行、第二行。

引入二階行列式的符號之後，重新考慮解$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots(2) \end{cases}$的過程，

可得$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$。

當$\Delta\neq 0$ 時，方程組有唯一解$(x,y)=(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta})$ [此稱為**克拉瑪公式**]

當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組有無限多解。

當$\Delta=0$，而Δ_x、Δ_y 有一不為 0 時，方程組無解。

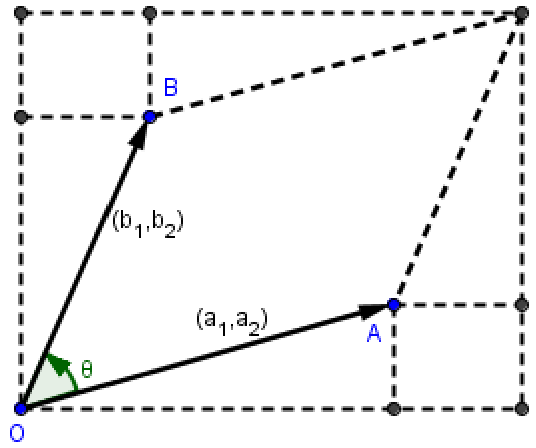
(b)二階行列式的幾何意義：

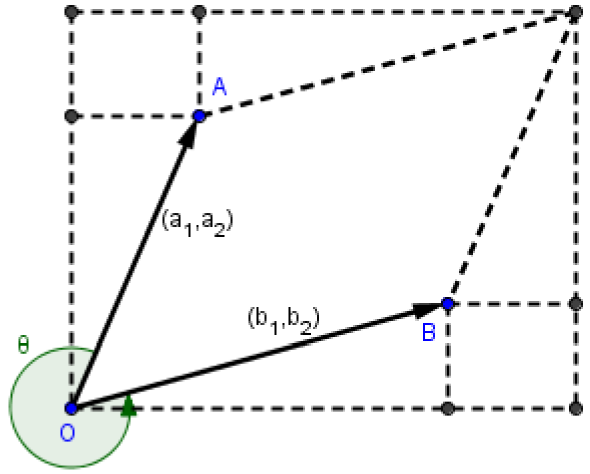
設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$為平面上兩個向量，根據前面的討論，可以得知

由 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所展成的平行四邊形面積$=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

若 $\overrightarrow{a}$ 繞著起點旋轉θ到 $\overrightarrow{b}$ 且 $0°<θ<180°$，則$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1>0$。

若 $\overrightarrow{a}$ 繞著起點旋轉θ到 $\overrightarrow{b}$ 且 $180°<θ<360°$，則$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1<0$。

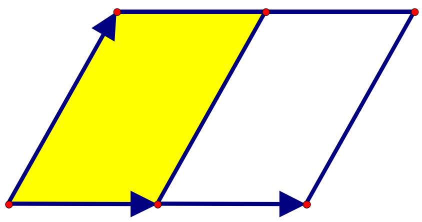




[討論]：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1\ ,\ a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1\ ,\ b_2)$且 $\overrightarrow{a}$ 繞起點旋轉θ到 $\overrightarrow{b}$ 且 $0°\le θ\le 180°$，

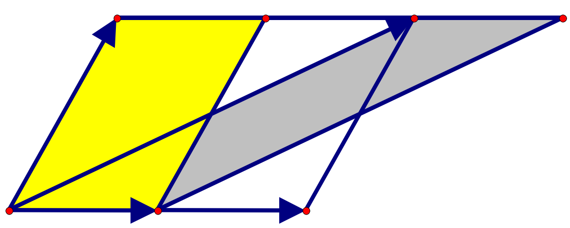
令$<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$代表$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$，請使用面積的觀點來解釋下列的性質：



(1)$<k\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>=k<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$ 即$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(2)$<\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}>=-<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$ 即$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(3)$<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}+k\overrightarrow{a}>=<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$ 即$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$



(2)行列式的性質：

(1°)**行列互換其值不變。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(2°)**有一列(行)全為 0，其值為 0。**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{，} \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

(3°)**每一列(行)可提公因數。**

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{，} \begin{vmatrix} ka_1 & a_2 \\ kb_1 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(4°)**兩列(行)互換，其值變號。**

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{，} \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(5°)**一列(行)乘以一數加至另一列(行)，其值不變。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + ra_1 & b_2 + ra_2 \end{vmatrix} \text{，} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + ra_1 \\ b_1 & b_2 + rb_1 \end{vmatrix}$$

[例題2] 設$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2$，(1)求$\begin{vmatrix} 3a & 12b \\ c & 4d \end{vmatrix}=$？ (2)求$\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}=$？

Ans：(1)24 (2)86

[例題3] (行列式拆項)

證明下列性質：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}；$$

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

(練習3) 求 $\begin{vmatrix} 390 & 104 \\ 150 & 20 \end{vmatrix}$ =______。Ans：-7800

(練習4) 試求下列各題的行列式值：(1) $\begin{vmatrix} 2990 & 2991 \\ 2992 & 2993 \end{vmatrix}$ =? (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ =?

Ans：(1)-2　(2)1

(練習5) 試解下列方程式，$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix}$ =3。Ans：x=5 或-1

(練習6) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ =5，則求(1) $\begin{vmatrix} 3a & 4b \\ 3c & 4d \end{vmatrix}$ =_____。(2) $\begin{vmatrix} 3a-2b & a+5b \\ 3c-2d & c+5d \end{vmatrix}$ =________。

Ans：(1)60　(2)85

(丙)二階行列式的應用式

(1)平行四邊形的面積：

設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$為平面上兩個向量，

由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 張成的平行四邊形面積=$|a_1b_2-a_2b_1|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

特別情形：$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

[例題4] (1)設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$，證明： $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

(2)已知 A(3,1)、B(2,3)、C(k–2,–1)三點共線，試求 k 的值。Ans：k=6

[例題5] 設由 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 張成的平行四邊形面積為 5，試求由 $2\vec{a}+\vec{b}$ 、 $\vec{a}-3\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積。Ans：35

(練習7) 設 $\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(3,2)$。

(1) 求以 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

(2) 求以 $2\vec{a}$ ，$\vec{a}-\vec{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

Ans：(1)8　(2)16

(練習8) 若 A(a_1 , a_2)、B(b_1 , b_2)、C(c_1 , c_2)三個點共線，則 $\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}=0$

(練習9) 已知 $A(3,1)$, $B(2, 3)$, $C(k–2, –1)$，若△ABC 面積為 6，k =？

Ans：0 或 12

(2)克拉瑪公式：

解二元一次方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots (2) \end{cases}$，其中 x,y 是未知數，

我們使用代入消去法解之

$(1)\times b_2-(2)\times b_1 \Rightarrow (a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1)$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1 \Rightarrow (a_2b_1-a_1b_2)y=(c_1a_2-c_2a_1)$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，可得 $\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases}$

當$\Delta\neq 0$時，方程組有唯一解$(x,y)=(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta})$ [此稱為**克拉瑪公式**]
當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組有無限多解。
當$\Delta=0$，而Δ_x、Δ_y有一不為 0 時，方程組無解。

[例題6] 試利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}3x+5y=-1，\\7x-4y=29。\end{cases}$

[解法]：

$\triangle=\begin{vmatrix}3 & 5\\7 & -4\end{vmatrix}=3\times(-4)-5\times 7=-47$，

$\triangle_x=\begin{vmatrix}-1 & 5\\29 & -4\end{vmatrix}=(-1)\times(-4)-5\times 29=-141$，

$\triangle_y=\begin{vmatrix}3 & -1\\7 & 29\end{vmatrix}=3\times 29-(-1)\times 7=94$，

得 $x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{-141}{-47}=3$，$y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{94}{-47}=-2$。

(3) 二元一次方程組解的幾何意義：

解二元一次方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1，\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$的解，相當於討論直線 L_1：$a_1x+b_1y=c_1$、L_2：$a_2x+b_2y=c_2$的相交情形。

(a)當$\triangle\neq 0$時，二元一次方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1，\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$恰有一組解

$x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}$，$y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}$，

即L_1:$a_1x+b_1y=c_1$與L_2:$a_2x+b_2y=c_2$兩直線恰交於一點 $(\dfrac{\triangle_x}{\triangle},\dfrac{\triangle_y}{\triangle})$。
從向量的觀點來看，
因為L_1：$a_1x+b_1y=c_1$與L_2：$a_2x+b_2y=c_2$表坐標平面上的兩直線，且
$\overrightarrow{n_1}=(a_1，b_1)$ 與$\overrightarrow{n_2}=(a_2，b_2)$分別為$L_1$與$L_2$的法向量 ($\overrightarrow{n_1}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{n_2}\neq\overrightarrow{0}$)，
當$\triangle=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$，則$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$不平行，於是此兩直線$L_1$與$L_2$不平行也不重合，所以$L_1$與$L_2$恰交於一點。

(b)當$\triangle=0$時，情形又是如何呢？
當$\triangle=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，則$\overrightarrow{n_1}$ // $\overrightarrow{n_2}$ (法向量互相平行)，此兩直線L_1與L_2平行或重合。

更進一步：

(1°) 若$\triangle_x$，$\triangle_y$有一不為 0 時，則由上述解方程組過程中，得到的
$\begin{cases}\triangle\cdot x=\triangle_x，\\\triangle\cdot y=\triangle_y。\end{cases}$顯然是無解的，所以原方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1，\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$無解。此時，坐標平面上兩直線$L_1$：$a_1x+b_1y=c_1$與$L_2$：$a_2x+b_2y=c_2$是平行的。

(2°) 若$\triangle_x=\triangle_y=0$時，由行列式的性質可知存在實數 k，使得 $a_1=ka_2$，$b_1=kb_2$，$c_1=kc_2$。

所以原方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解與方程式 $a_1x+b_1y=c_1$ 的解會完全相同，於是原方程組有無限多組解，此時坐標平面上兩直線 $a_1x+b_1y=c_1$ 與 $a_2x+b_2y=c_2$ 是重合的。

結論：

$\triangle$，$\triangle_x$，$\triangle_y$ 之值的分類，將二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$之解的情況與幾何意義整理如下：

行列式 $\triangle$，$\triangle_x$，$\triangle_y$ 之值	方程組的解	幾何意義
$\triangle\neq0$	恰有一組解	兩直線恰交於一點
$\triangle=0$，且$\triangle_x$，$\triangle_y$有一不為 0	無　解	兩直線平行
$\triangle=\triangle x=\triangle y=0$	有無限多組解	兩直線重合

[例題7] 試就實數 k 之值，討論二元一次方程組，$\begin{cases} (k+1)x+4y=4, \\ x+(k-2)y=1 \end{cases}$ 的解。

先計算$\triangle$，$\triangle_x$，$\triangle_y$之值：

$$\triangle=\begin{vmatrix} k+1 & 4 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}=(k+1)(k-2)-4\times1$$
$$=k^2-k-6=(k+2)(k-3),$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}=4(k-2)-4\times1=4(k-3),$$

$$\triangle y=\begin{vmatrix} k+1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(k+1)\times1-4\times1=k-3。$$

(1) 當$\triangle\neq0$，即 $k\neq-2$ 且 $k\neq3$ 時，原方程組恰有一組解，

$$x=\frac{\triangle_x}{\triangle}=\frac{4(k-3)}{(k+2)(k-3)}=\frac{4}{k+2},$$

$$y=\frac{\triangle_y}{\triangle}=\frac{(k-3)}{(k+2)(k-3)}=\frac{1}{k+2}。$$

(2) 當$\triangle=0$，即 $k=-2$ 或 $k=3$，

當 $k=-2$，則$\triangle=0$，$\triangle_x\neq0$，$\triangle_y\neq0$，方程組無解。

當 $k=3$，則$\triangle=0$，$\triangle_x=\triangle_y=0$，方程組有無限多組解，

其解就是 $x+y=1$ 的解，可表為$\begin{cases} x=t, \\ y=1-t \end{cases}$，$t$ 為實數。

[例題8] 方程組$\begin{cases} 2x+5y=kx \\ 3x+4y=ky \end{cases}$，除了(0,0)以外，還有其它解，則 $k=$？

[解答]：原式$\Rightarrow\begin{cases} (2-k)x+5y=0 \\ 3x+(4-k)y=0 \end{cases}$，$\Delta=\begin{vmatrix} 2-k & 5 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix}=(k-7)(k+1)$

由於方程組有無限多解 $\Rightarrow$ $\Delta=0$ $\Rightarrow$ $k=7$ 或-1。

(練習10)試就實數 k 之值，試討論方程組 $\begin{cases}(k+1)x+4y=4\\ x+(k-2)y=1\end{cases}$。

Ans：$k\neq3$ 且 $k\neq-2$，方程組有唯一解；$k=3$，解 $x=1-t$，$y=t$；$k=-2$，無解

(練習11)就 k 值討論方程式的解：$\begin{cases}(k-2)x-2y=2k\\ 3x+(2k+1)y=-k-2\end{cases}$。Ans：當 $k\neq1$，$\frac{3}{2}$時，恰有一組解，當 $k=1$ 時，有無限多組解，當 $k=\frac{3}{2}$時，無解。

綜合練習

(1) 求下列各行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2001 & 2002 \\ 2003 & 2004 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 31 & 58 \\ 63 & 117 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \sqrt{5}+2\sqrt{11}+7 & 2\sqrt{11} \\ \sqrt{5}+2\sqrt{11}-7 & \sqrt{5}-7 \end{vmatrix}$

(2) 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2$，求$\begin{vmatrix} 3a-2c & 3c \\ 3b-2d & 3d \end{vmatrix}$之值。

(3) 設 $A(1,0)$，$B(-1,2)$，$C(3,k)$。

(a) 若$\triangle ABC$的面積為 4，求 k 值。

(b) 若 A，B，C 三點共線，求 k 值。

(4) 試利用克拉瑪公式，解下列一次方程組：

(a) $\begin{cases} 4x-y=13, \\ 3x+5y=4. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 30x+31y=62. \end{cases}$

(5) 設方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解為 $x=2$，$y=3$，求方程組$\begin{cases} a_1x+2b_1y=3c_1 \\ a_2x+2b_2y=3c_2 \end{cases}$的解。

(6) 設以$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$為兩鄰邊的平行四邊形面積為 5，求以 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$和$-3\overrightarrow{a}$為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

(7) 試求實數 k 之值，使得一次方程組$\begin{cases} 2x+(5-k)y=k+3, \\ (5-k)x+2y=9-k. \end{cases}$

(a) 恰有一組解。(b) 有無限多組解。(c) 無解。

(8) 已知 a，b 為整數且行列式$\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix}=4$，求$|a+b|$之值。

(9) 設$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$，

則$\overrightarrow{c}$可唯一表為$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的線性組合的充要條件為$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$。證明這個結果！

進階問題

(10) 若$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$之解為(4, 3)，則$\begin{cases} 2b_1x+a_1y+3c_1=0 \\ 2b_2x+a_2y+3c_2=0 \end{cases}$之解$(x, y)$=？

(11) 方程組$\begin{cases} x+ky=5 \\ kx-y=5k-8 \end{cases}$的解為正整數，且 $x>5$，則整數 $k=$？

(12) 設 $xyz\neq 0$，若 $3x-4y+3z=0$，且 $x-y+2z=0$，試求$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$之值。

(13) 求方程組$\begin{cases}(k-1)x+ky=1\\(k+2)x+(k+3)y=2\end{cases}$，$k\in R$ 之解 $(x,y)=$？，

又$|x|+|y|$ 的最小值為何？　　【提示：三角不等式】

(14) (a) 設 $ABCD$ 為平面上一凸四邊形，令 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}=\overrightarrow{CD}$，

試證：四邊形 $ABCD$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2\left|\vec{b}+\vec{c}\right|^2-\left[(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})\right]^2}$

(b) 設 $\overrightarrow{AB}=(6,1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)$，$\overrightarrow{BC}\ /\!/\ \overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，試求四邊形 $ABCD$ 的面積。

綜合練習解答

(1) (a)34 (b)-8 (c)-2 (d)-27 (e)-88

(2) 18

(3) (a)-6 或 2 (b)-2

(4) (a) $(3,-1)$ (b)$(\frac{31}{14}, \frac{-1}{7})$

(5) $(6,\frac{9}{2})$

(6) 15

(7) (a)$k\neq3$ 且 7 (b)$k=3$ (c)$k=7$

(8) 32

(9) $\overrightarrow{c}$可唯一表為$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的線性組合

$\Leftrightarrow$ 恰有一組實數 x，y，使得$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$恰有一組解

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq0 \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$不平行。

(10) $(-\frac{9}{2}, -12)$

(11) -1

(12) 5

(13) $(\frac{k-3}{3},\frac{4-k}{3})$，$\frac{1}{3}$

(14) (a)提示：凸四邊形 ABCD 的面積等於$\frac{1}{2}$對角線長度乘積乘上夾角的正弦值。(b) 16