§1–4 差角公式

(甲)差角與和角公式

已知兩個角度α、β的正弦、餘弦與正切值，是否可以得知α+β與α−β的正弦、餘弦與正切值呢？

我們要推導一連串的公式—**差角**與**和角**公式來回答這個問題。

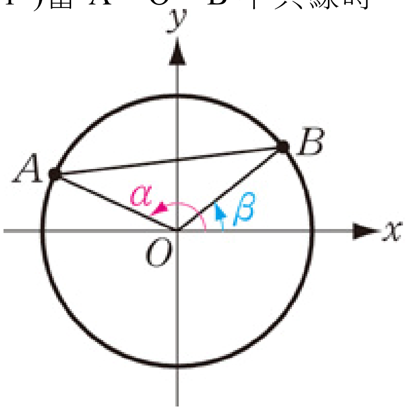
(1)餘弦的差角公式：

首先討論如何用 α，β 的正弦與餘弦表示 cos(α−β)。

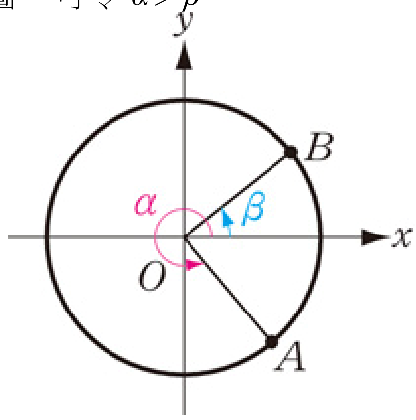
令廣義角 α，β 皆為標準位置角(O 為原點)，則其終邊分別與單位圓交於 A(cosα，sinα)與 B(cosβ，sinβ)，因為同界角的正弦與餘弦分別相等，所以考慮「$0°\le\alpha$，$\beta\le 360°$ 」即可。

又因為 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$，所以可令 α ≥ β，而不影響 cos(α−β)的求法。

(1°)當 A，O，B 不共線時，如下圖，可令 $\alpha>\beta$。



(a) $\angle AOB=\alpha-\beta$



(b) $\angle AOB=360°-(\alpha-\beta)$

因為 $\alpha-\beta$(或是 360°−(α−β))是△OAB 的內角，且其夾邊 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 之長都是 1，所以由餘弦定理可以將第三邊 $\overline{AB}$ 之長表為 $\cos(\alpha-\beta)$的式子；另一方面，由距離公式可以將 $\overline{AB}$ 之長表為 α，β 之正弦與餘弦的式子。如此一來，差角 $\alpha-\beta$ 的餘弦，便可藉由單角 α，β 的正弦與餘弦求出來。

由餘弦定理知：

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(\angle AOB)$

$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$=2-2\cos(\alpha-\beta)$。

另外，由距離公式知：

$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$

$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，

所以 $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，即

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

(2°) 當 $\alpha=\beta$ 時，則
$\cos(\alpha-\beta)=\cos 0°=1$，且 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，故
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，仍然成立。

(3°) 當 $\alpha-\beta=180°$時，則 $\cos(\alpha-\beta)=\cos 180°=-1$，且
$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$=\cos(180°+\beta)\cos\beta+\sin(180°+\beta)\sin\beta$
$=-\cos^2\beta-\sin^2\beta=-1$，故
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，仍然成立。

因此 α，β 為任意廣義角時，

$\boxed{\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}}$恆成立。

(2)和角與差角公式

以餘弦的差角公式做基礎，可以進一步推導：
$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 以及 $\sin(\alpha+\beta)$。

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\text{。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos[90°-(\alpha-\beta)]\\&=\cos[(90°-\alpha)+\beta]\\&=\cos(90°-\alpha)\cos\beta-\sin(90°-\alpha)\sin\beta\text{。}\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\text{。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin[\alpha-(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\text{。}\end{aligned}$$

利用商數關係，我們還可以導出正切的和角與差角公式，而且仍然可以用正切表示。當 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 都有意義時，

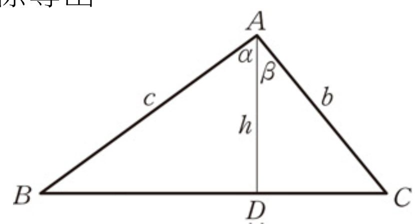
$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\text{（分子、分母同除以 }\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta}\text{）}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\text{。}\end{aligned}$$

上式中以 $-\beta$ 代 β，得
$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\text{。}$$

結論：和角與差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$（其中 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha+\beta)$ 皆有意義時）
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$。（其中 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha-\beta)$ 皆有意義時）
和角公式的精神：
已知兩個角度的正弦、餘弦與正切值，
可得兩個角度的和或差的正弦、餘弦與正切值。

(練習1) (1)如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，且 $\overline{AD}=h$，試利用「$\triangle ABC$ 面積$=\triangle ABD$ 面積$+\triangle ACD$ 面積」的關係導出：
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。
(2)利用(1)的公式導出底下的和角與差角公式：
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。



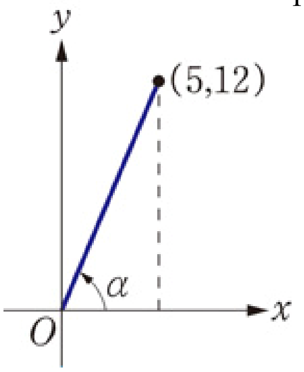
[例題1] (1) 試求 $\cos 75°$ 之值。
(2) 試求 $\cos 115°\cos 145°+\sin 115°\sin 145°$之值。
[解法]：
(1) $\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。
(2) $\cos 115°\cos 145°+\sin 115°\sin 145°=\cos(115°-145°)$
$=\cos(-30°)=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

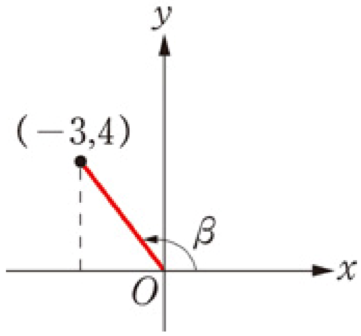
[例題2] 設 α 為第一象限角且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，β 為第二象限角且 $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$，
試求 $\sin(\alpha+\beta)$與 $\cos(\alpha+\beta)$之值。
[解法]：
如圖，因為 α 為第一象限角，且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$。
因為 β 為第二象限角，且 $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$，所以 $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$。利用和角公式，得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{16}{65}$。

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{63}{65}$。





[例題3] 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$。試求下列兩小題：

(1) 試求 $\tan(\alpha+\beta)$之值。(2) 若 $0°<\alpha<90°$ 且 $90°<\beta<180°$，試求 $\alpha+\beta$。

[解法]：

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{3}+(-2)}{1-\frac{1}{3}\cdot(-2)}=\dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=-1$。

(2) 因 $0°<\alpha<90°$，且 $90°<\beta<180°$，故 $90°<\alpha+\beta<270°$，

又 $\tan(\alpha+\beta)=-1<0$，

所以 $\alpha+\beta$ 為第二象限角，於是 $\alpha+\beta=135°$。

[例題4] 若 $\tan\alpha$，$\tan\beta$為 $x^2+9x-4=0$ 之二根，

試求

(1)$\tan(\alpha+\beta)=$？

(2)$\sin^2(\alpha+\beta)+9\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-4\cos^2(\alpha+\beta)=$____。

Ans：(1)$\frac{-9}{5}$ (2)-4

(練習2) 試求 cos15°，sin105°，tan75°之值。

Ans：cos15°=$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，sin105°=$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，tan75°=$2+\sqrt{3}$

(練習3) 設 α 為第二象限角且 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，β 為第四象限角且 $\sin\beta=-\dfrac{8}{17}$，求 sin（$\alpha-\beta$）與 cos（$\alpha-\beta$）之值。

Ans：sin（$\alpha-\beta$）=$\dfrac{36}{85}$，cos（$\alpha-\beta$）=$\dfrac{-77}{85}$

(練習4) 已知 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-3$。

(1) 試求 tan（$\alpha-\beta$）之值。

(2) 若 $180°<\alpha<270°$且 $90°<\beta<180°$，試求 $\alpha-\beta$。

Ans：(1)-1　(2)135°

(練習5) 試化簡下列各小題：

(1)$\sin68°\cos23°-\sin23°\cos68°=$？

(2)$\cos44°\sin164°-\sin224°\cos344°=$？

(3)$\cos(\alpha+30°)\cos(\alpha-60°)+\sin(\alpha+30°)\sin(\alpha-60°)=$？

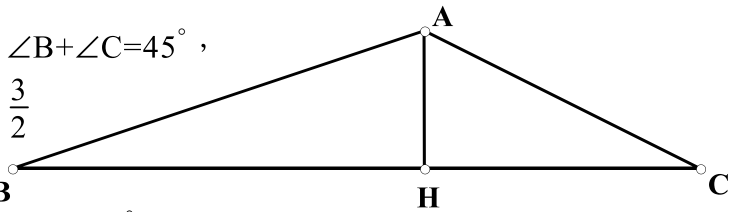
Ans：(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3)0

(練習6) 如右圖，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$且$\overline{BC}=5\overline{AH}$，$\angle B+\angle C=45^{\circ}$，

若$\overline{BH}>\overline{HC}$，則$\dfrac{BH}{HC}=$？　Ans：$\dfrac{3}{2}$

[提示：令 BH=x，HC=1，

則 AH=$\dfrac{1}{5}(x+1)$，再利用 $\tan(B+C)=\tan45^{\circ}=1$，求 x 的值。]



(練習7) 設 $\tan\alpha=1$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，試求 $\tan\beta$之值。　Ans：$2-\sqrt{3}$

(練習8) 設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$為 $2x^2-4x+1=0$ 之二根，試求

(1)$\cos^2(\alpha+\beta)=$____。

(2)$2\sin^2(\alpha+\beta)-4\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+4\cos^2(\alpha+\beta)=$_____。

Ans：(1)$\dfrac{1}{17}$(2)$\dfrac{20}{17}$

(練習9) 試求下列各值：

(1)$\tan12^{\circ}+\tan48^{\circ}+\sqrt{3}\tan12^{\circ}\tan48^{\circ}=$_____。[提示：考慮 tan(12°+48°)]

(2)$\dfrac{\tan227^{\circ}-\tan287^{\circ}}{1-\tan133^{\circ}\tan107^{\circ}}=$______。

Ans：(1)$\sqrt{3}$ (2)$-\sqrt{3}$

(乙)倍角與半角公式

(1)正弦、餘弦與正切的二倍角公式

當 $\alpha=\beta$ 時，則和角 $\alpha+\beta$ 即為倍角 2α，根據和角公式，即可以推出正弦、餘弦與正切的倍角公式。

$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$。

$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos2\alpha-\sin2\alpha$。
而 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$，
且 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$。

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

（其中 $\tan\alpha$，$\tan 2\alpha$ 皆有意義）。於是我們得到：

> 結論：
> 正弦、餘弦與正切的二倍角公式
> $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$。
> $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$。
> $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$。（其中 $\tan\alpha$，$\tan 2\alpha$ 皆有意義時）

(2)倍角公式求半角：
根據餘弦的二倍角公式
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

令 $2\alpha=\theta$，則上式可以寫成 $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

換句話說，$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$，$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$。

故已知 $\cos\theta$的值，可以根據餘弦的二倍角公式求得$\frac{\theta}{2}$的正弦與餘弦值。
結論：

$\frac{\theta}{2}$的正弦、餘弦值 $\xleftarrow{\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ $\cos\theta$ $\xrightarrow{\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta}$ 2θ的正弦、餘弦值

例如：

(1)已知 $\cos\theta=\frac{2}{3}$，請求出 $\cos2\theta=$？

根據 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{2}{3})^2-1=\frac{-1}{9}$

(2)已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，試求 $\cos\frac{\alpha}{2}=$？

令 $2\theta=\alpha$，可得 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

所以 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{6}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}$

[例題5] 設 θ 為第三象限角且 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，試求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$ 之值。

[解法]：

因 θ 為第三象限角且 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，故 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$，於是

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$。

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$，

$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}=-\frac{24}{7}$。

[例題6] 已知 $\tan\theta=\frac{-3}{4}$ 且 $270°<\theta<360°$，試求：

(1)$\cos2\theta$、$\tan2\theta$ (2)$\sin\frac{\theta}{2}$、$\cos\frac{\theta}{2}$

Ans：(1)$\cos2\theta=\frac{7}{25}$、$\tan2\theta=\frac{-24}{7}$、(2)$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$、$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

[例題7] 已知 $\sin\theta=\frac{-2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\tan\theta<0$ (2) $\tan^2\theta>\frac{4}{9}$ (3) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$

(4) $\sin2\theta>0$ (5)標準位置角θ與 2θ的終邊未在不同象限。

(2011 學科能力測驗) Ans：(1)(2)

[例題8] 試證明三倍角公式：

(1) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$。

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$。

證明：

(1) $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=(2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$。

(2) $\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-(2\sin\theta\cos\theta)\cdot\sin\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$。

[例題9] (正切表示二倍角)

$\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ ，$\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

證明：

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta=2\tan\theta\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\right)=2\tan\theta\left(\frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}\right)=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\frac{1}{\cos^2\theta}}-1=\frac{2}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$。

結論：利用 tanθ可以將 sin2θ，cos2θ，tan2θ表示出來，整理如下：

(a) $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ (b) $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ (c) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(練習10) 設 θ 為第二象限角，且 $\tan\theta=-2$，求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 之值。

Ans：$\dfrac{-4}{5}$、$\dfrac{-3}{5}$、$\dfrac{4}{3}$

(練習11) 設 $90°<\theta<180°$且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin 2\theta$及 $\sin\dfrac{\theta}{2}$、$\sin 3\theta$的值。

Ans：$\sin 2\theta=\dfrac{-24}{25}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$、$\sin 3\theta=\dfrac{117}{125}$

(練習12) 試利用三倍角公式說明：若 $x=\sin 10°$，則 $8x^3-6x+1=0$
（亦即 $\sin 10°$是方程式 $8x^3-6x+1=0$ 之一根）。

(練習13) $180°<\theta<270°$，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\sin\dfrac{\theta}{2}=$____，$\cos\dfrac{\theta}{2}=$____。Ans：$\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ，$\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

(練習14) 試求 sin22.5°，cos22.5°，tan22.5°之值。Ans：$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

(練習15) 設 $90°<\theta<180°$ ，且 $3\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=0$，

則 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=$_____。Ans：$\dfrac{-7}{13}$

(練習16) 設 $\sin x=3\cos x$， 則 $\cos 2x=$______，$\sin 2x=$______。Ans：$\dfrac{-4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$

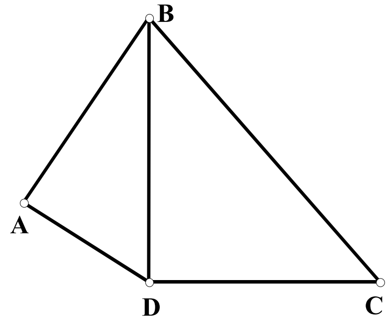
(丙)和角與倍角公式的應用

[例題10] 在ΔABC 中，已知$\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=\dfrac{-3}{5}$ ，且其外接圓半徑為$\dfrac{13}{2}$，

則 $\sin\angle BAC=$_________。 Ans：$\dfrac{33}{65}$ (2010 指定甲)

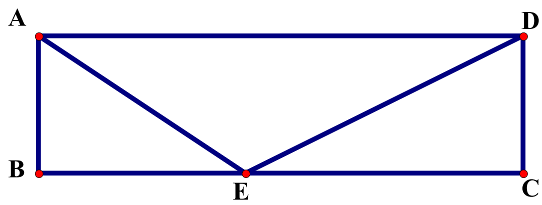
[例題11] 已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}$=16，$\overline{BC}$=25，$\overline{CD}$=15，∠ABC 及∠BCD 皆為銳角，而 sin∠ABC=$\frac{24}{25}$，sin∠BCD=$\frac{4}{5}$，試求：

(1)$\overline{BD}$=？　(2)$\overline{AD}$=？　Ans：(1)20　(2)12



(練習17) 矩形 ABCD 中，若$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$=7，在$\overline{BC}$上取一點 E，使得$\overline{BE}$=3，試求 tan∠AED=__________。

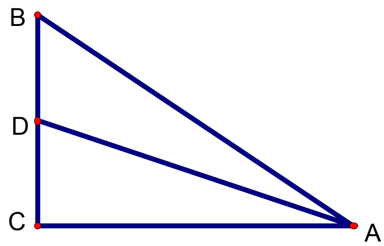
Ans：$\frac{-7}{4}$



(練習18) 右圖是一個直角三角形 ABC，其中∠C=90°，∠BAD=θ，若$\overline{CD}$=$\overline{BD}$=1，$\overline{AC}$=3，則 tanθ=？

(A)$\frac{3}{11}$ (B)$\frac{1}{7}$ (C)$\frac{2}{9}$ (D)$\frac{1}{9}$ (E)$\frac{1}{3}$。

Ans：(A)



(練習19) ΔABC 中，已知 tanB= $\frac{3}{4}$，cosC= $\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$ =22，則

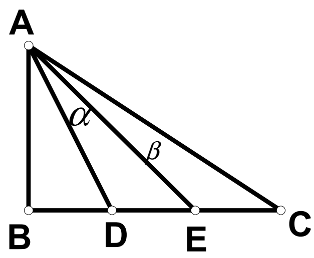
(1)sinA=_____，(2)ΔABC 之外接圓半徑為________。Ans：(1)$\frac{11\sqrt{5}}{25}$　(2)$5\sqrt{5}$

(練習20) 如右圖，∠ABC=90°，$\overline{BD}$=$\overline{DE}$=$\overline{EC}$=$\frac{1}{2}\overline{AB}$，

$\angle DAE=\alpha$，$\angle EAC=\beta$，則

(1) $\tan\alpha=$？　(2) $\cos\beta=$？

Ans：(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{5\sqrt{26}}{26}$



[例題12] 已知ΔABC 中，$\overline{AB}$=2、$\overline{BC}$=3 且$\angle$A=2$\angle$C，則$\overline{AC}$=________。

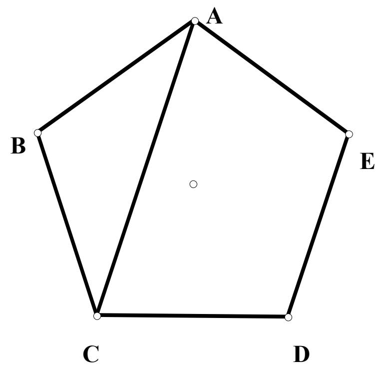
Ans：$\frac{5}{2}$　(2010 學科能力測驗)

[例題13] (1)利用倍角公式，求出$\sin 18^\circ$之值。(2)求$\sin 54^\circ$之值。

Ans：(1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

[例題14] 如圖，假設正五邊形的邊長為 a，請求出對角線$\overline{AC}$的長度。

Ans：$\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$　註：$\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$**稱為黃金比例數**



[例題15] 設 $\sin2\theta=\frac{-3}{5}$，$270°<\theta<360°$，試求下列之值：

(1)$\sin\theta-\cos\theta$ (2)$\cos^4\theta-\sin^4\theta$ (3)$\sin^6\theta+\cos^6\theta$

Ans：(1)$-\sqrt{\frac{8}{5}}$ (2)$\frac{-4}{5}$ (3)$\frac{73}{100}$

結論： 底下是一些有用的公式： (a) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta=1\pm\sin2\theta$ (b) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$ (c)$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(練習21) $-90°<\theta<90°$， 且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$，

則(1)$\sin2\theta=$____ (2)$\cos2\theta=$_____，(3)$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$_____。

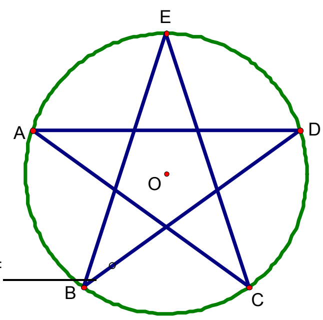
Ans：(1)$\frac{-15}{16}$(2)$\frac{\sqrt{31}}{16}$ (3)$\frac{47}{128}$

(練習22) 若 $225°<\theta<270°$，$\sin2\theta=a$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$__________。Ans：$-\sqrt{1-a}$

(練習23) 已知正五角星(即 $ABCDE$ 為正五邊形)內接於一圓 O，

如右圖所示.若 $\overline{AC}=1$，則圓 O 的半徑長=？.

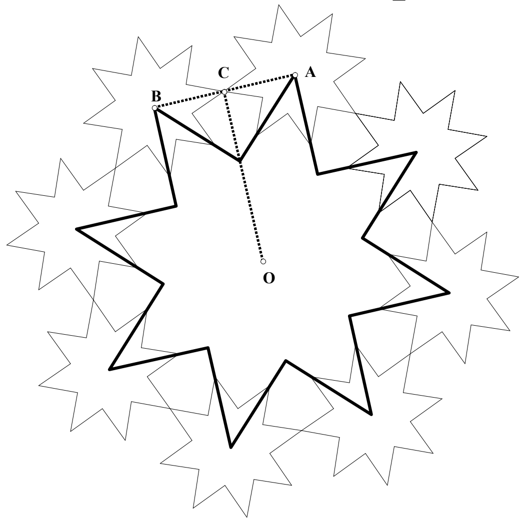
[$\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$]Ans：$\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$



(練習24) 設 $f(x)=4x^3-3x+1$，則 $f(x)$被 $x-\sin20°$除後所得的餘式=______

Ans：$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (提示：利用三倍角公式與餘式定理)

(練習25) 如下圖，一個大的正八角星形的頂點為周圍八個全等的小正八角星形中心，相鄰的兩個小八角星有一個共同頂點。觀察圖中虛線部分，設小八角星頂點 C 到其中心 A 的距離為 a，大八角星頂點 A 到其中心的距離為 b。試問 $a：b$ 的比值為何？　Ans：$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$



綜合練習

(1) 試求下列各式的值：

(a) $\cos 78° \cos 42° - \sin 78° \sin 42°$。(b) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$。

(c) $\sin 22.5° \cos 22.5°$。 (d) $\dfrac{2\tan 67.5°}{1-\tan^2 67.5°}$。

(2) 已知 $180° < \theta < 270°$，且 $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$，試求下列各式的值：

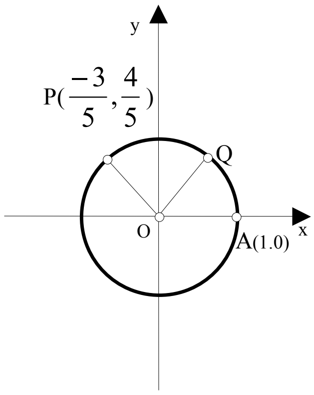
(a) $\sin 2\theta$。 (b) $\cos 2\theta$。 (c) $\sin\dfrac{\theta}{2}$。 (d) $\cos\dfrac{\theta}{2}$。

(3) 化簡下列兩小題：

(a) $\sin(\theta+60°)\cos(\theta-60°)-\cos(\theta+60°)\sin(\theta-60°)=$？

(b) $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A} =$？

(4) 如右圖：設 $A(1,0)$，$Q(m,n)$，$P(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$均在單位圓上，$\angle QOP=60°$，算出點 Q 的坐標。



(5) 設 $\sin 84°=a$，$\cos 63°=b$，則

(A) $\cos 21°=b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$

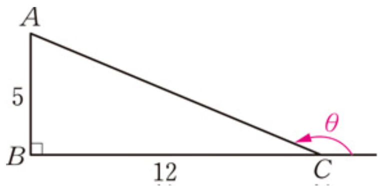
(B) $\sin 21°=ab-\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$

(C) $\sin 147°=ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$

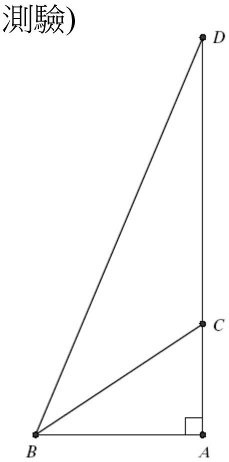
(D) $\cos 147°=b\sqrt{1-b^2}-a\sqrt{1-a^2}$。

(6) 在$\triangle ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{13}{14}$，$\cos B=-\dfrac{1}{7}$，求$\angle C$。

(7) 如右圖，θ 為一個有向角，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，求 $\sin\dfrac{\theta}{2}$與 $\cos\dfrac{\theta}{2}$之值。



(8) 如右圖，直角三角形 ABD 中，∠A 為直角，C 為$\overline{AD}$邊上的點。已知$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，∠ABD=2∠ABC，則$\overline{BD}=$__________。(2010 學科能力測驗)



(9) 設$\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}, 270° \le 2\alpha \le 360°$，求

(a) $\cos\alpha$ (b) $\tan\alpha$ (c) $\cos^4\dfrac{\alpha}{2}+\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$之值

(10) 設 $0<\alpha<90°$，$0<\beta<90°$，且 $\cos\alpha=\dfrac{11}{61}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$，請求出

(a) $\cos(\alpha-\beta)$ (b) $\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ (c) $\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$。

(11) 下列何者為 $8x^3-6x+1=0$ 之根？

(A) sin10°(B) sin30°(C) sin130° (D) sin160° (E)sin250°。

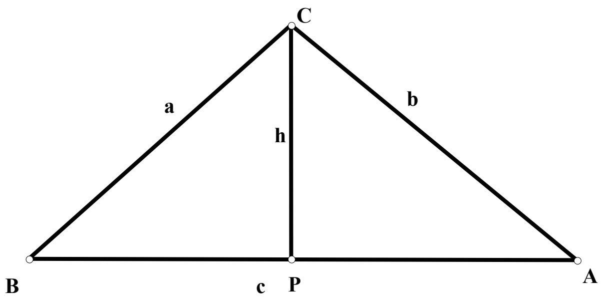
(12) 如圖，ΔABC 的對邊分別為 a,b,c，P 為 C 點的垂足，h 為高，BP=x，AP=y，

則下列那些選項必定為真？

(A)cosC= $\dfrac{h}{a}+\dfrac{h}{b}$ (B)cosC= $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$

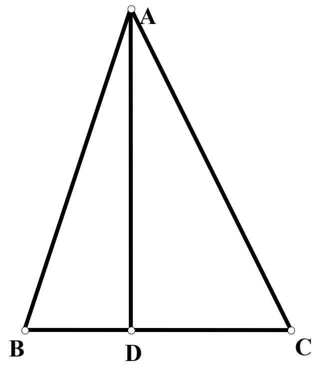
(C)cosC=cos(A+B)(D)cosC=$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$

(E)cosC= $\dfrac{h^2-xy}{ab}$ 。(91 學科)



(13) 如右圖，在ΔABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於 D 點，

且$\overline{AD}$：$\overline{BD}$：$\overline{CD}$=6：2：3，求∠BAC=？。



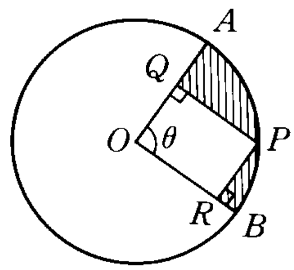
(14) 坐標平面上設 A(2，4)，B(3，1)，O(0，0)，

則 tan∠AOB＝_______ 。

(15) 半徑 14 的圓 O 上有一扇形 AOB；如圖所示，在 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上取一點 P，已知 P 對$\overline{OA}$作垂直線段$\overline{PQ}$，其長為 13；P 對$\overline{OB}$作垂直線段$\overline{PR}$，其長為 11。則：

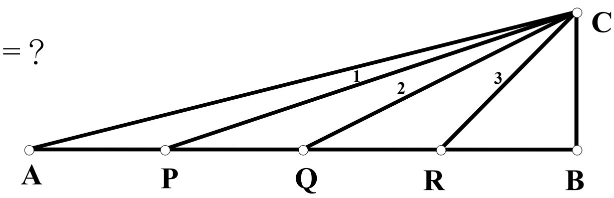
(a)若此扇形 AOB 的圓心角 θ ，則 θ 為________ 。

(b)斜線面積為_________ 。



(16) 如圖，設 AP=PQ=QR=RB=BC，

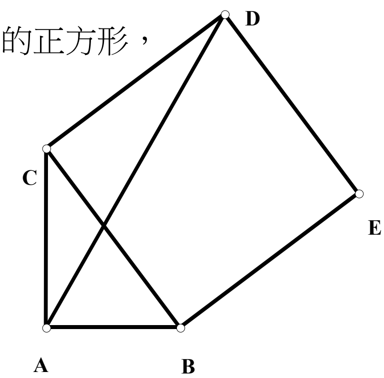
求(a)tan∠1=？ (b)tan∠2=？ (c)tan∠3=？



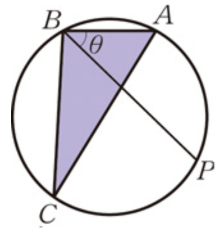
(17) 設ΔABC 為一直角三角形，BCDE 為以$\overline{BC}$為一邊向外作出的正方形，

若$\overline{BC}$=5，$\overline{CA}$ =4，$\overline{AB}$ =3，

試求 cos∠ACD=_______ ，ΔACD 的面積=__________ 。



(18) 如右圖，在△ ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，且∠B 的分角線交其外接圓於 P 點，若∠$ABP=\theta$，求：
(a) $\sin\theta$ 之值。(b) $\overline{PC}$ 之長。



(19) 設 A,B,C 為ΔABC 三內角的度量，且 tanA,tanB,tanC 均有意義，試證：tanA+tanB+tanC=tanA·tanB·tanC。

(20) 設 A，B，C 均為正銳角，tanA＝2，tanB＝4，tanC＝13，則(a)tan(A＋B)＝__________；(b)A＋B＋C＝__________。

(21) 已知 ΔABC 為銳角三角形，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=10$，D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，$\angle BAD=\alpha$，$\overline{BD}:\overline{DC}=3:2$，若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，(a)求 cosA=？ (b) $\overline{BC}$ 邊之長為何。

(22) 設 tanα、tanβ為 $x^2+px+q=0$ 之二根($p^2-4q\geq 0$)，試以 p,q 表示
(a)tan(α+β)=？ (b)$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$=？

(23) $2x^2+ax-1=0$ 有一根為 $\sin30^\circ+\cos30^\circ$，求 a 的值。

(24) (a)試求 cos11.25°，sin11.25°的值。
(b)試求單位圓內接正十六邊形的面積及周長。

(25) 等腰三角形的頂角為 20°，腰長為 1，底長為 $2b$，試求 $8b^3-6b$ 之值為何？

進階問題

(26) 以 $x-\cos40^\circ$除 $f(x)=3x-4x^3$ 之餘式為__________。

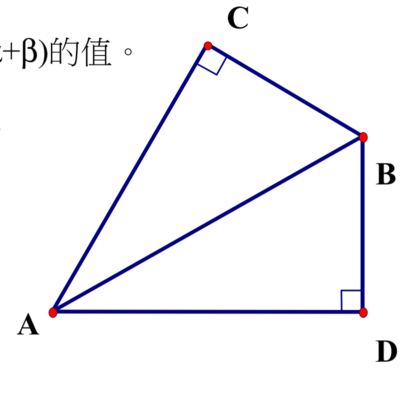
(27) 設 180°<x<360°，化簡 $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$。

(28) 四邊形 ABCD 內接於圓 O，圓 O 的半徑為$\dfrac{65}{8}$，已知四邊形的周長為 44，$\overline{BC}=\overline{CD}=13$，試問$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的長度為何？

(29) 試求 cos20°cos40°cos80°的值。

(30) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$且 $\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，求 cos(α−β)與 cos(α+β)的值。

(31) 如右圖，兩個全等的直角三角形中，$\overline{AC}=4$，$\overline{BD}=3$，試求 C 點到直線 AD 的最短距離？



(32) 設 cosα+cosβ+cosγ=0，sinα+sinβ+sinγ=0，試求 cos(α−β)=______。

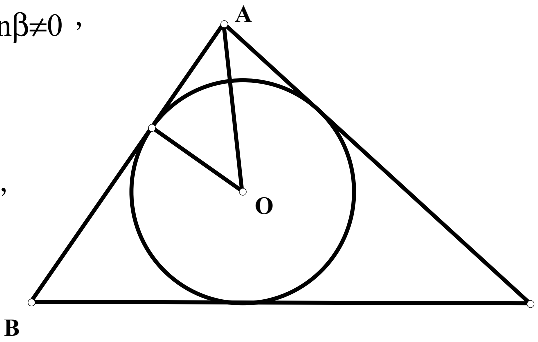
(33) 證明：
(a)$\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2x-\sin^2y$。
(b)$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$。

(34) $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均為正銳角，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{5}$，$\tan\gamma=\frac{1}{7}$，$\tan\delta=\frac{1}{8}$，求$\alpha+\beta+\gamma+\delta=$____。

(35) 設 $\cos x+\cos y=a$，$\sin x+\sin y=b$，試以 a,b 表示 $\cos(x-y)=$？

(36) 設 A,B,C 為銳角ΔABC 三內角的度量，且 tanA,tanB,tanC 均有意義，試求 $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ 之最小值。

(37) 設 $x^2-px+q=0$ 的二根為 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，且 $\tan\alpha+\tan\beta\neq0$，試求 $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$__________。

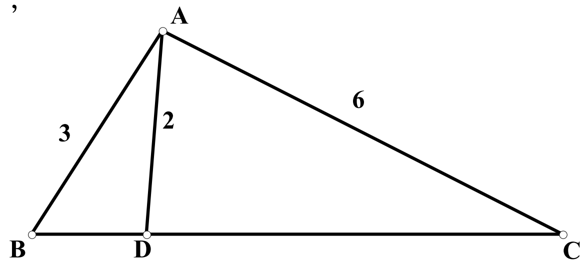


(38) ΔABC 中，BC=a，CA=b，AB=c，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

試證：$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(39) 設 $\sin\alpha+\sin\beta=1$，$\cos\alpha+\cos\beta=0$，求 $\cos2\alpha+\cos2\beta$之值。

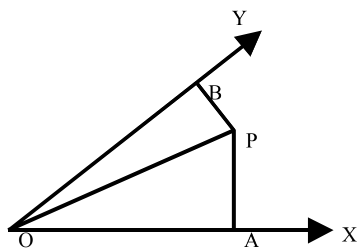
(40) 在右圖ΔABC 中，$\overline{AB}=3,\overline{AC}=6,\overline{AD}=2$，且$\angle BAD=\theta$，$\angle DAC=2\theta$：
(a)利用ΔABC 之面積=ΔABD 面積+ΔADC 面積，以θ之三角函數列出方程式。
(b)試利用(a)的結果求 $\cos\theta$ 之值。



(41) 試證明 $\sin10^\circ$為無理數。

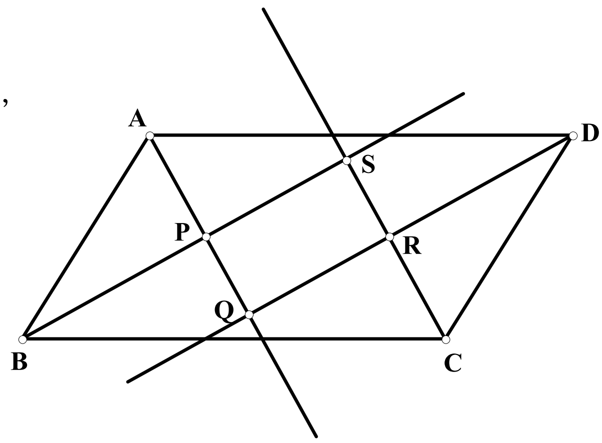
(42) 化簡$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin2^\circ}{\sin(2k-1)^\circ\cdot\sin(2k+1)^\circ}$。
(Hint：$\sin2^\circ=\sin[(2k+1)^\circ-(2k-1)^\circ]$)

(43) 求$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=$？



(44) 過銳角$\angle$XOY 內部一點 P 作$\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}$之垂線，垂足為 A、B，若$\angle XOY=\theta$，試證：$\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}}{\overline{OA}+\overline{OB}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$。

(45) 平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，且 $a\neq b$，$\angle A=\alpha$，其內角平分線圍成一矩形，試以 a,b,α表示此矩形的面積。



綜合練習解答

(1) (a)$\frac{-1}{2}$ (b)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c)$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (d)-1

(2) (a)$\frac{24}{25}$ (b)$\frac{-7}{25}$ (c)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (d)$\frac{-\sqrt{5}}{5}$

(3) (a)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b)0

(4) Q$\left(\frac{-3+4\sqrt{3}}{10},\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\right)$[提示：設$\angle AOP=\alpha$，即得 $\cos\alpha=\frac{-3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，因為$\angle QOP=60°$ 所以$\angle AOQ=\alpha-60°$，$\Rightarrow m=\cos(\alpha-60°)$，$n=\sin(\alpha-60°)$]

(5) (A)(B)(C)

(6) 60°

(7) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$，$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{26}}$

(8) $\frac{90}{7}$

(9) (a)$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ (b)$\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (c)$\frac{5}{6}$

(10) (a)$\frac{273}{305}$ (b)$\frac{16}{305}$ (c)$\frac{49}{305}$

(11) (A)(C)(E)

(12) (E)

(13) 45°

(14) 1

(15) (a)120° (b)$\frac{196\pi}{3}-47\sqrt{3}$[提示：令$\theta=\angle AOP+\angle BOP$，再求 $\cos\theta$]

(16) (a)$\frac{1}{13}$ (b)$\frac{1}{7}$ (c)$\frac{1}{3}$

(17) $\frac{-3}{5}$，8

(18) (a)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b)$\frac{21}{4}$

(19) [提示：利用 $A+B+C=180^\circ$，$A+B=180^\circ-C$ $\Rightarrow\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)$，再利用和角公式展開化簡即可得 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$]

(20) (a)$\frac{-6}{7}$(b)225°

(21) (a)$\frac{3}{5}$ (b)$\sqrt{65}$

(22) (a)$\frac{-p}{1-q}$ (b)q

(23) -2

(24) (a)$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ ；$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

(b)面積$=8\sin\frac{\pi}{8}=4\sqrt{2-\sqrt{2}}$；周長$32\sin\frac{\pi}{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

(25) -1

(26) $\frac{1}{2}$

(27) $\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})$[提示：利用 $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2\sin^2\frac{x}{2}$]

(28) 4、16 或 16、4

[提示：設$\overline{AB}=x,\overline{AD}=y$，$\angle CBD=\angle CDB=\theta$，根據正弦定理可知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，又周長為 44，所以 $x+y=18$，由餘弦定理可知$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\cos2\theta$，根據倍角公式$\Rightarrow xy=56$]

(29) $\frac{1}{8}$(令 $p=\cos20°\cos40°\cos80°$，

$(2^3\sin20°p)=(2^3\sin20°)\cos20°\cos40°\cos80°=\sin160°$)

(30) $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{-59}{72}$

[提示：$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ …….(A)，$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$ ……..(B)，

$(A)^2+(B)^2\Rightarrow 2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{13}{36}$，

由(A)$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}$，由(B)$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{3}$，將兩式相除，得 $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$，再求 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$]

(31) $\frac{96}{25}$

(32) $\frac{-1}{2}$ (Hint：將 $\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$，$\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$兩式平方相加)

(33) 利用和角公式直接計算，即可得證.

(34) 45°[提示：可以先計算 $\tan(\alpha+\beta)$、$\tan(\gamma+\delta)$，再計算 $\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$的值]

(35) $\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

(36) $3\sqrt{3}$ (Hint：利用不等式 $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ ，其中 a,b,c 為正數與 tanA+tanB+tanC=tanA·tanB·tanC)

(37) $\dfrac{1+q}{p}$

(38) [提示：$\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{r^2}{OA^2}$，因為 $r=\dfrac{\Delta}{s}$ 所以 $r^2=\dfrac{1}{s^2}\cdot s(s-a)(s-b)(s-c)$
$=\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$，$OA^2=r^2+(s-a)^2=\dfrac{(s-a)[(s-b)(s-c)+s(s-a)]}{s}$，
$\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{r^2}{OA^2}=\dfrac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)+s(s-a)}=\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}$]

(39) 1[提示：$\sin\alpha=1-\sin\beta$，$\cos\alpha=-\cos\beta$，兩式平方相加可得 $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 再計算 $\cos2\alpha+\cos2\beta$]

(40) 令$\theta=10°$，$3\theta=30°\Rightarrow\sin3\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow3\sin\theta-4\sin^3\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow8\sin^3\theta-6\sin\theta+1=0$
故 $\sin\theta$為方程式 $8x^3-6x+1=0$ 的實根，再證明方程式 $8x^3-6x+1=0$ 無有理根，即可得證。

(41) (a)$3\sin3\theta=\sin\theta+2\sin2\theta$ (b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

(42) $\cot1^\circ-\cot(2n+1)^\circ$

(43) $\dfrac{1}{2}(\sin2\theta-\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}})$

[提示：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}(\sin\frac{\theta}{2^{k-2}}-\sin\frac{\theta}{2^{k-1}})=\frac{1}{2}(\sin2\theta-\sin\frac{\theta}{2^{n-1}})$]

(44) [提示：設$\angle POA=\alpha$，$\angle POB=\beta$，$PA=OP\cdot\sin\alpha$，$PB=OP\cdot\sin\beta$ $OA=OP\cdot\cos\alpha$，$OB=OP\cdot\cos\beta$ $\dfrac{PA+PB}{OA+OB}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$
$=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\tan\dfrac{\theta}{2}$。]

(45) $\dfrac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$ [提示：$BS=BC\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}=b\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$BP=BA\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}=a\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$
$PS=BS-BP=(b-a)\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$AQ=AD\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$AP=AB\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$，
$PQ=AQ-AP=(b-a)\cos\dfrac{\alpha}{2}$，故矩形面積$=PS\cdot PQ=\dfrac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$。]