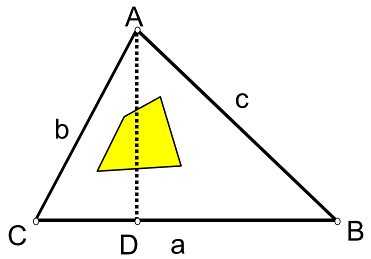
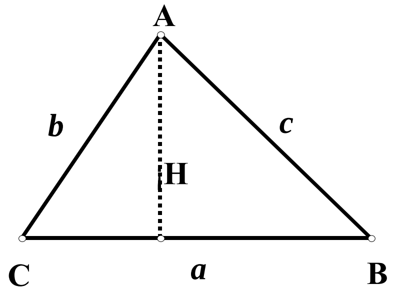
§1−3 正弦定理與餘弦定理

(甲)三角形的面積

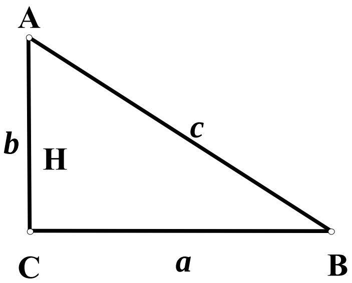
三角形的面積公式：

國中△ABC 面積= $\frac{1}{2}$×底×高，以底與高的長度表示面積但是當$\overline{BC}$邊上的『高』不容易求出來的時候(如有障礙物)，我們可以利用正弦或餘弦關係式間接求出高，於是△ABC 的面積=$\frac{1}{2}$×a×b**sinC**

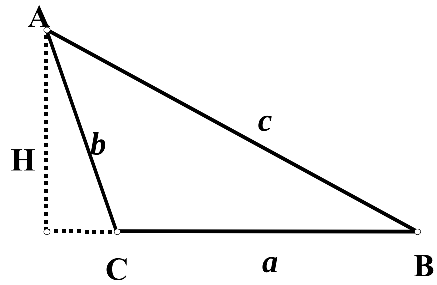




∠C 是銳角



∠C 是直角



∠C 是鈍角

事實上圖中，∠C 是銳角，當∠C 是直角或是鈍角時 △ABC，$\overline{BC}$邊上的高仍然是 $\boxed{b\times\sin C}$ ∴△ABC 面積=$\frac{1}{2}\times a\times b\sin C$

同理由對稱性得△ABC 的面積公式=$\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin C=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A=\frac{1}{2}\times c\times a\times\sin B$

(練習1) 已知正△ABC 每邊的長是 a，求其面積。Ans：$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

結論：

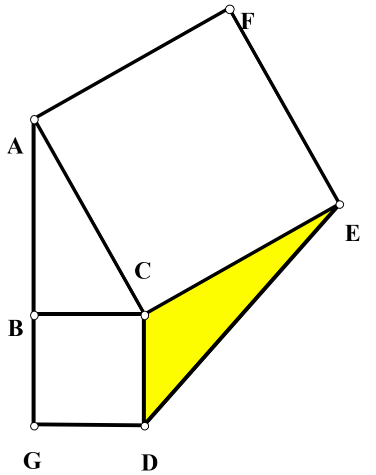
△面積記憶法⇒利用三角函數定義，由△=$\frac{1}{2}$×底×高，導出兩邊夾角求面積，即

△=$\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin C=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A=\frac{1}{2}\times c\times a\times\sin B$ (兩邊夾一角)

[例題1] 設ΔABC為直角三角形，ACEF 是以$\overline{AC}$為一邊向外作出的正方形，

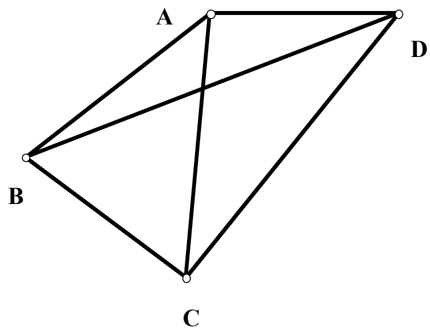
BCDG 是以$\overline{BC}$為一邊向外作出的正方形，若$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=3$，
試求(a)$\cos(\angle DCE)$　(b)ΔDCE的面積。

Ans：(a)$\frac{-3}{5}$ (b)6



[例題2] 四邊形 ABCD，設θ為對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的一個交角，

求證：此四邊形的面積為$\frac{1}{2}\ \overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\theta$。



(練習2) 四邊形兩對角線為 12 與 5，若兩對角線的夾角為θ_1,θ_2，且$\theta_1=2\theta_2$則其面積為__________。Ans：$15\sqrt{3}$

(練習3) 已知一三角形 ABC 的二邊$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=8$，$\cos A=\frac{-4}{5}$，
則ΔABC的面積為________。　Ans：12

(乙)正弦定理

國中幾何曾經學過「**大邊對大角**」這個性質，但這個性質只說角大則邊大，邊大則角大，這種說法似乎只是一種對於邊角關係的「**定性描述**」，那麼邊角之間有沒有「**定量的描述**」呢?我們用以下的定理來回答這個問題：

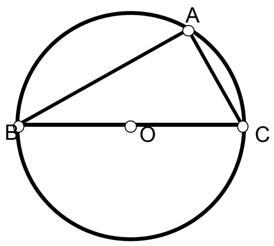
正弦定理：
在ΔABC中，以a,b,c表示$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$之對邊長度，
則$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為$\Delta ABC$外接圓的半徑。
(邊與對角正弦值成正比，比值為外接圓直徑)

證明：由前面三角形的面積公式：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin C=\frac{1}{2}\times b\times c\times \sin A=\frac{1}{2}\times c\times a\times \sin B$

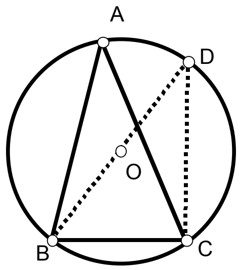
等號兩邊同除以 abc，可得 $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 。

但是 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=$？我們由以下的證明來說明：

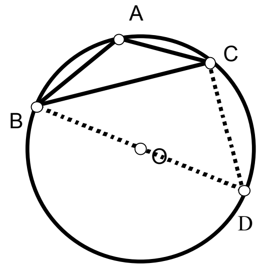
將ΔABC 分成直角、銳角、鈍角三種情形來討論，如下圖所示：



(1)當∠A=90°



(2)當∠A<90°



(3)當∠A>90°

(1)$\angle A=90^\circ\Rightarrow\frac{a}{\sin 90^\circ}=a=\overline{BC}=$外接圓直徑$=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(2)∠A 為銳角：

過 B 做圓 O 的直徑 $\overline{BD}$，因為∠A 與∠D 對同弧($\overset{\frown}{BC}$)，因此∠A=∠D。

考慮直角三角形 BCD，由銳角三角形的定義可知 $\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A$

$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=BD=$外接圓直徑$=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

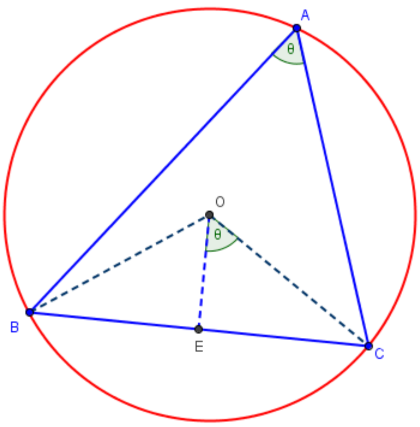
(3)∠A 為鈍角：

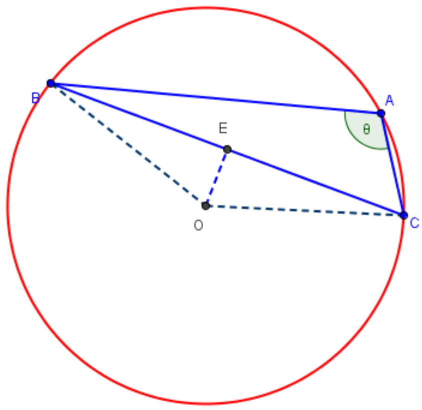
過 B 做圓 O 的直徑 $\overline{BD}$，因為 $\angle A+\angle D=180^\circ$，所以 $\sin\angle D=\sin(180^\circ-\angle A)=\sin A$

考慮直角三角形 BCD，由銳角三角形的定義可知 $\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A$

$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=BD=$外接圓直徑$=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

(**練習4**) 如圖，試證明：$\frac{a}{\sin A}=2R$(其中 R 為ΔABC 的外接圓)





結論：

正弦定理與邊角變換：

(a)比例型：$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C$。

(b)邊化角：$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$。

(c)角化邊：$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$。

[例題3] ΔABC 中 ，a,b,c 分別代表$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 之對邊長度：

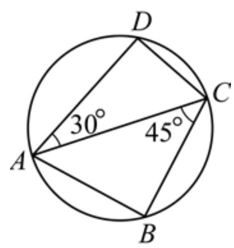
(1)若$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

(2)若$\angle B=55^{\circ}$，$\angle C=65^{\circ}$，$a=10$ 公分，試求外接圓半徑。

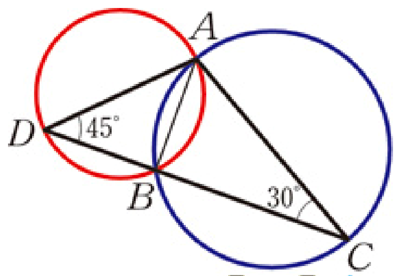
Ans：(1)4:3:2 (2)$\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}$ 公分

[例題4] 設圓內接四邊形 ABCD 中$\angle CAD=30°$，$\angle ACB=45°$，$\overline{CD}=2$，則$\overline{AB}=$________。

Ans：$2\sqrt{2}$



[例題5] 如右圖，大小兩圓相交於 A，B 兩點，過 B 點有一直線交大圓於 C 點，交小圓於 D 點。若$\angle ACD=30°$，$\angle ADC=45°$，求大圓與小圓的面積比。Ans：2：1



(練習5) 利用三角形的面積公式與正弦定理，證明：ΔABC 的面積為$\dfrac{abc}{4\text{R}}$。
(R 為外接圓半徑)

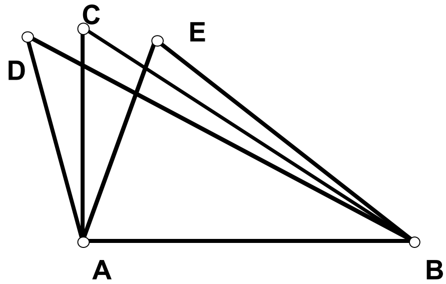
(練習6) 在下列各條件下，求△ABC 的外接圓半徑 R。
(1)$\angle$B=70°，$\angle$C=80°，a=3。(2)b=2，cosB= $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Ans：(1)R=3(2)R=2

(練習7) △ABC 中，$\angle$A=60°，$\angle$B=75°，$\overline{\text{AC}}=\sqrt{3}+1$，求(1)$\overline{\text{BC}}$之長(2)$\overline{\text{AB}}$之長
Ans：(1)$\overline{\text{BC}}=\sqrt{6}(2)\overline{\text{AB}}$=2 (sin75°=$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$)

(練習8) 以 a,b,c 分別表示△ABC 之三邊$\overline{\text{BC}},\overline{\text{CA}},\overline{\text{AB}}$的長，試在下列各條件下，
求 sinA：sinB：sinC。(已知 sin75°= $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)
(1)$\angle$A=30°,$\angle$B=45° (2)$\angle$A：$\angle$B：$\angle$C=3：4：5
(3)$-a+2b-c=0$ 且 $3a+b-2c=0$ (4)$(a+b)$：$(b+c)$：$(c+a)$=5：6：7
Ans：
(1)2：$2\sqrt{2}$：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (2)$2\sqrt{2}$：$2\sqrt{3}$：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (3)3：5：7 (4)3：2：4

(丙)餘弦定理

直角三角形中的寶藏是畢氏定理。即在直角△ABC 中，若夾角$\angle$C=90°則知兩鄰邊 a,b，可由畢氏定理 $c^2=a^2+b^2$ 求出對邊 c；對於一般的三角形，如果夾角給定，但不一定是直角，如何求第三邊的長呢？

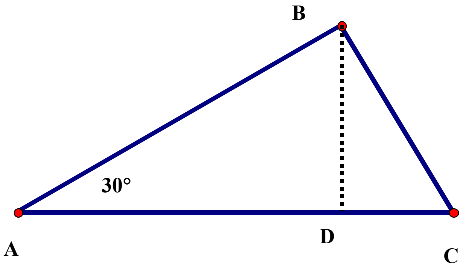


觀察右上圖，ΔABC 為直角三角形，且 AC=AD=AE=b，AB=c，BC=a，根據商高定理可得 $a^2=b^2+c^2$，即 $b^2+c^2-a^2=0$。在鈍角ΔADB 與銳角ΔAEB 中我們考慮 $b^2+c^2-\text{DB}^2$ 與 $b^2+c^2-\text{BE}^2$ 的值，從圖形中可猜出 $b^2+c^2-\text{DB}^2<0$ 而 $b^2+c^2-\text{BE}^2>0$，但進一步我們不禁會問這兩個值會不會與邊或角的三角函數有關呢？

例子：設ΔABC 中，$\angle$A=30°，$\overline{AB}=6,\overline{AC}=7$，請求出$\overline{BC}$=？

[解法]：作高$\overline{BD}$，$\overline{AD}=6\cdot\cos30°$，$\overline{BD}=6\cdot\sin30°\Rightarrow\overline{CD}=7-6\cdot\cos30°$

在ΔBDC 中，$\angle$BDC=90°



$\Rightarrow\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overline{BC}^2&=(6\cdot\sin30°)^2+(7-6\cdot\cos30°)^2\\&=6^2(\sin^2 30°)+7^2-2\times6\times7\times\cos30°+6^2(\cos^2 30°)\\&=6^2(\sin^2 30°+\cos^2 30°)+7^2-2\times6\times7\times\cos30°\\&=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos30°\end{aligned}$$

上例的解法，對於$\angle$A 為鈍角或直角時都會成立，我們將其寫成底下的定理。

餘弦定理：

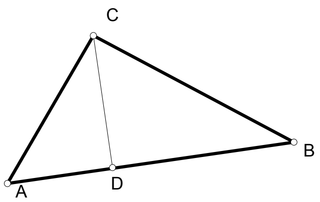
在ΔABC 中，若 a,b,c 為$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C 之對邊長，則

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

證明：在ΔABC 中，依$\angle$A 為銳角、直角、鈍角三種情形來說明：

設 C 點對 AB 邊或其延長線的垂足點為 D

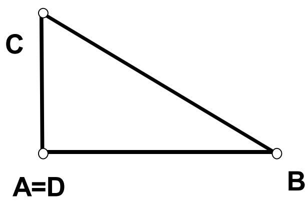
(1) $\angle$A 為銳角



$\because\cos A>0$

$\therefore\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=c-b\cdot\cos A$

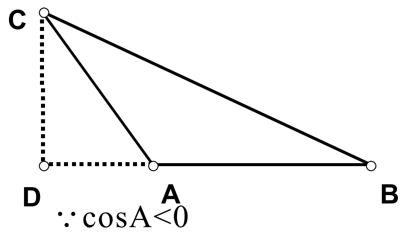
(2) $\angle$A 為直角



$\because\cos A=0$

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{AB}=c-b\cdot\mathrm{coA}$

(3) $\angle$A 為鈍角



$\because\cos A<0$

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{AB}+\overline{AD}=c+|b\cdot\cos A|$

$=c-b\cdot\cos A$

由以上的討論可知：不論$\angle$A 為銳角、直角、鈍角均可得$\overline{BD}=c-b\cdot\cos A$。

又因為 $a^2=\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=(c-b\cdot\cos A)^2+(b\cdot\sin A)^2$

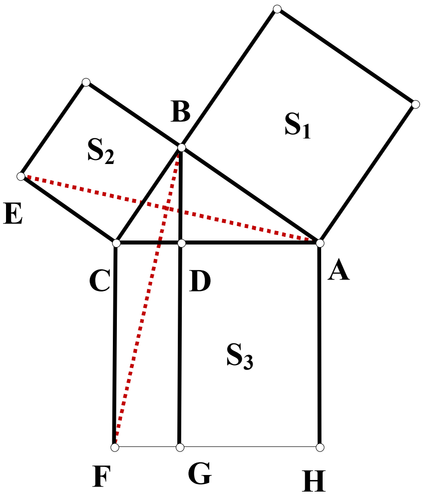
$$\begin{aligned}&=c^2-2bc\cdot\cos A+b^2\cdot\cos^2 A+b^2\cdot\sin^2 A\\&=c^2+b^2-2bc\cdot\cos A\end{aligned}$$

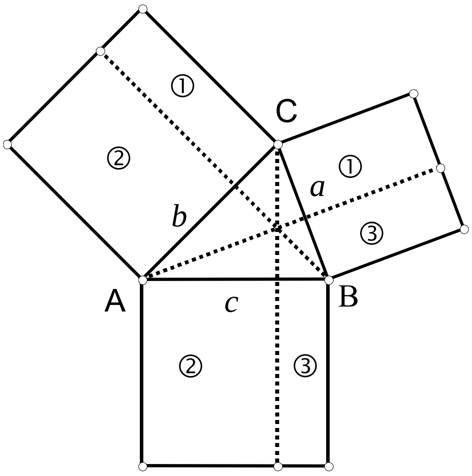
故 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，同理可證 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$。

[畢氏定理的圖解]

歐幾里得證明了矩形 ADGH 面積=S_1，矩形 CDGF 面積=S_2，因此可得 $S_3=S_1+S_2$。

據此可證明$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$。





[圖解餘弦定理]

餘弦定理的面積證法(如上右圖)：

c^2 =②+③ =(①+②)+(①+③) −2×① =$b^2+a^2-2ab\cdot\cos C$

結論：

(a)由餘弦定理，可知 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(b)從(a)可知 $\angle A=90^\circ \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$　$\angle A<90^\circ \Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$　$\angle A>90^\circ \Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$

[例題6] 在ΔABC 中已知 sinA:sinB:sinC= 4：5：7，則求 cosC =？sinC=？

Ans：$\dfrac{-1}{5}$、$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

(練習9) △ABC 中，$\overline{AB}$=3，$\overline{AC}$=4，∠A 角度如下，試分別求出$\overline{BC}$之長。

(1)∠A=60°　(2)∠A=90°　(3)∠A=138°　已知 cos42°=0.7431

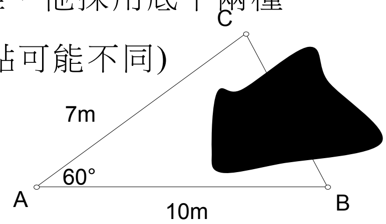
Ans：(1)$\sqrt{13}$(2)5(3)6.54

(練習10) 池塘旁有 B,C 兩點，小明想知道 B,C 兩點間的距離，他採用底下兩種方法，試根據所得資料求出$\overline{BC}$距離？(兩者所在地點可能不同)

法一：

他走到遠處 A 點，並量得∠BAC=60°，$\overline{AC}$=7m

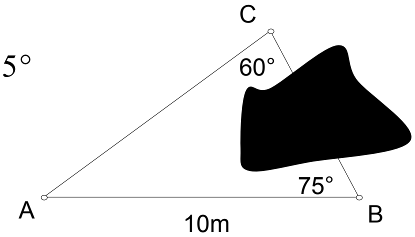
$\overline{AB}$=10m，請問$\overline{BC}$=？



法二：

他走到遠處 A 點，並測得∠ACB=60°，∠ABC=75°

$\overline{AB}$=10m，請問$\overline{BC}$=？Ans：(1)$\sqrt{79}$(2)$\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$



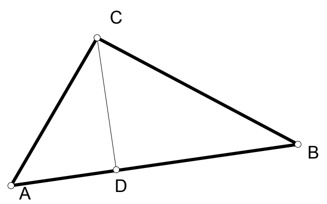
(練習11) ΔABC 中，若$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，則∠C=________。 Ans：60°

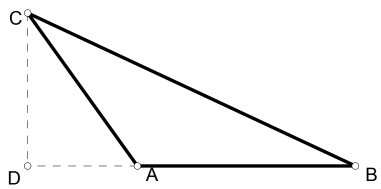
(練習12) ΔABC 中，若 sinA:sinB:sinC=$\sqrt{2}$:2:($\sqrt{3}$ −1)，則∠B=_______。Ans：135°

(練習13) 在ΔABC 中，若 a,b,c 分別代表ΔABC 的三邊長$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$之長。

(1)試證：$a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$，$b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos B$，$c=a\cos B+b\cos A$

(2)利用(1)去證明：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

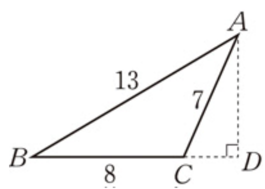




(練習14) 已知△ABC 三邊長為 $\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=7$，如右圖所示，求：

(1) ∠ACB。

(2) $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}$ 之長。Ans：(1)120°，(2)$\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$



(丁)正餘弦定理的應用

(1)解三角形：

(a)三角形的全等性質有 SSS、SAS、AAS、ASA、斜股性質，我們可以利用正餘弦定理來解出唯一的三角形。

(b)SSA 型的討論：ΔABC 中，若已知 a,b 及∠A

[想法]：

設$\overline{AC}=b$，利用尺規在∠A 的邊 $\overrightarrow{AX}$ 上做出 B 點使得$\overline{BC}=a$。想要找出另一個頂點 B，則圓規打開的半徑大小 a，一定要比頂點 C 到 $\overrightarrow{AX}$ 的距離大才有交點。

(1°)∠A 為銳角時，頂點 C 到 $\overrightarrow{AX}$ 的距離 $h=b\cdot\sin A$。

$a<h$ 時，找不到 B 點 ⇒無解。(如圖一)

$a=h$ 時，找到唯一一點 B ⇒恰有一解 (如圖二)

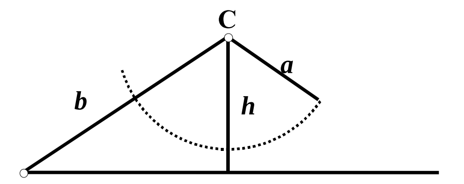
$h<a<b$ 時，有兩個 B 點 ⇒有兩解 (如圖三)

$b\le a$ 時，找到唯一一點 B ⇒恰有一解 (如圖四)

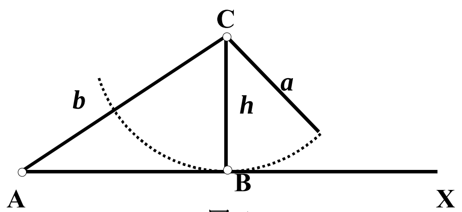
(2°)∠A 為鈍角時，頂點 C 到 $\overrightarrow{AX}$ 的距離$=b$

$a\le b$ 時，找不到 B 點 ⇒無解。(如圖五)

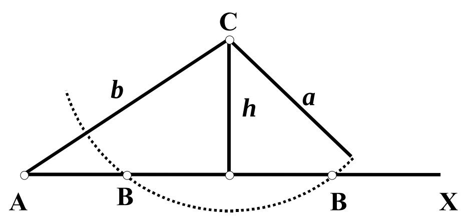
$a>b$ 時，找到唯一一點 B ⇒恰有一解 (如圖六)



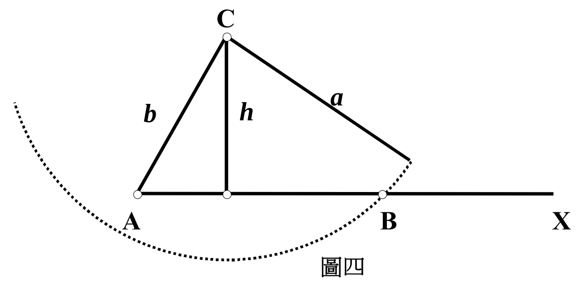
圖一



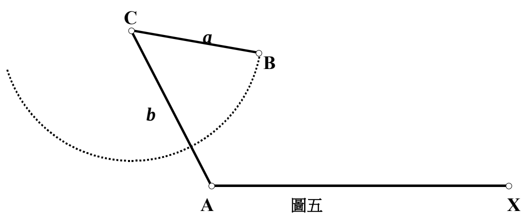
圖二



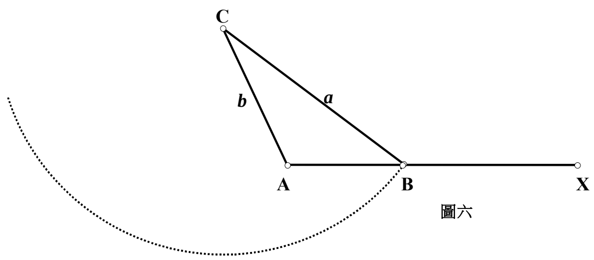
圖三



圖四



圖五



圖六

[例題7] 【已知二邊一對角⇒即知 SSA⇒解三角形】

已知ΔABC 中，$\overline{AC}=15$，$\overline{AB}=15\sqrt{3}$，∠B=30°，

則∠A=？$\overline{BC}=$？ Ans：∠A=90°，$\overline{BC}=30$；∠A=30°，$\overline{BC}=15$

[例題8] 【已知一邊兩角求邊與角⇒ASA】

△ABC 中,∠A=45°,∠B=60°，$\overline{BC}$=7，求$\overline{AB}$及$\overline{AC}$之長。(sin75°= $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

Ans：$\overline{AB}=\dfrac{7}{2}(\sqrt{3}+1)$，$\overline{AC}=\dfrac{7}{2}\sqrt{6}$

(練習15) 在下列各條件中，解三角形 ABC。

(1)a=1,b=2,∠A=60°

(2)a=1,b=2,∠A=30°

(3)$a=2\sqrt{3}$,$b=2\sqrt{2}$,∠A=60°

(4)$a=\sqrt{2}$,b=2,∠A=30°

Ans：(1)無解(2)$c=\sqrt{3}$,B=90°,C=60°

(3)$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,B=45°,C=75°

(4)有兩組解①$c=\sqrt{3}+1$,B=45°,c=105°

②$c=\sqrt{3}-1$,B=135°,c=15°

(練習16) 由下列條件解△ABC，何者恰有一解？

(A)$\angle A=40^{\circ}$，$\angle B=60^{\circ}$，$\angle C=80^{\circ}$　(B) $a=2$，$b=4$，$c=6$

(C) $a=1$，$b=2$，$\angle A=30^{\circ}$　(D) $a=1$，$b=3$，$\angle A=30^{\circ}$

(E) $a=1$，$b=4$，$\angle C=40^{\circ}$。Ans：(C)(E)

(練習17) ΔABC 中，$\overline{AB}$=1，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，∠A=30°，求$\overline{BC}$=？，∠B=？

Ans：1，120°

(練習18) ΔABC 中，設 c=8，∠A=105°，∠B=45°，求 b=？　Ans：$8\sqrt{2}$

(2)求三角形的面積：

(a)**Heron** 公式

設ΔABC 中，a,b,c 分別為∠A，∠B，∠C 之對邊長，令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

則 $S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

[證明]：由餘弦定理，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{1}{2}ac\cdot\sqrt{1-\cos^2 B}$$

$$=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}$$

$$=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{1}{2ac}\cdot\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)]^2}$$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(2s)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(b)三角形 ABC 的面積= $r\cdot s$

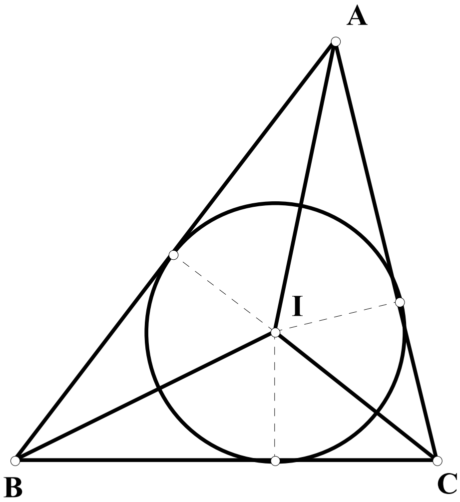
(r 為三角形 ABC 內切圓的半徑)

[證明]

三角形 ABC 的面積

$=\Delta ABI+\Delta BCI+\Delta CAI$

$=\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=r\cdot s$



三角形 ABC 的面積= $\frac{1}{2}$ 底×高 $=\frac{1}{2}bc\sin A$($\frac{1}{2}$ 兩邊乘積×夾角的正弦值) $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ s=周長之半 $=\frac{abc}{4R}$ (R 為三角形 ABC 外接圓的半徑) $=r\cdot s$ (r 為三角形 ABC 內切圓的半徑)

結論：

(a)已知三邊：$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **(Heron 公式)**

(b)已知二邊與夾角：$\Delta ABC=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B$

($\frac{1}{2}$ 兩邊乘積×夾角的正弦值)

(c)已知內切圓半徑 r：$\Delta ABC=rs$。

(d)已知外接圓半徑 R：$\Delta ABC=\frac{abc}{4R}$。

(e)任意凸四邊形面積=$\frac{1}{2}\cdot l\cdot m\cdot\sin\theta$。

(l,m 為對角線長，θ表示兩對角線之一夾角)

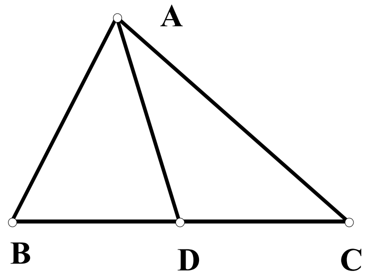
(練習19) 已知ΔABC 之三邊長分別為 4,6,8，則
(1)ΔABC 的面積=？(2)邊長 6 所對應的高=？
(3)ΔABC 的內切圓半徑=？(4)ΔABC 的外接圓半徑=？
Ans：(1)$3\sqrt{15}$ (2)$\sqrt{15}$ (3)$\frac{\sqrt{15}}{3}$ (4)$\frac{16\sqrt{15}}{15}$

(練習20) 有一凸多邊形 ABCD，若$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=6$,$\overline{CD}=4$，$\overline{BD}=6$，$\angle ABD=30^\circ$，則此四邊形的面積=？ Ans：$3+8\sqrt{2}$

(3)三角形或多邊形的邊角計算：

[例題9] 三角形的中線定理

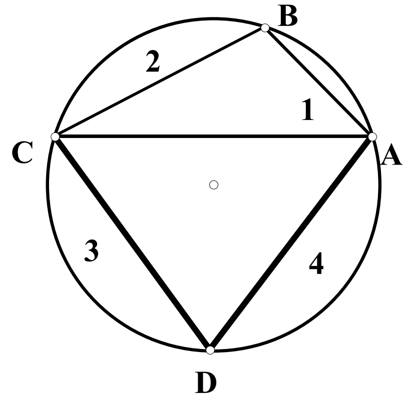
三角形 ABC 中， D 為 BC 之中點，試證：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$ 。



[例題10] 已知圓內接四邊形 ABCD 的各邊長為$\overline{AB}$=1，$\overline{BC}$ =2，$\overline{CD}$ =3，$\overline{AD}$ =4，

則(1)$\overline{AC}$ =？ (2)sin∠ABC=？ (3)ABCD 的面積

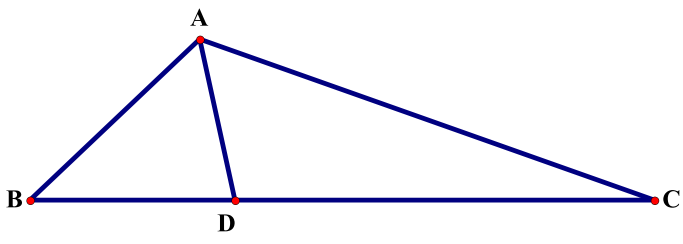
Ans：(1)$\sqrt{\dfrac{55}{7}}$ (2)$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ (3)$2\sqrt{6}$



[例題11] ΔABC 中，∠A 之內角平分線交$\overline{BC}$於 D，AB =3，AC =6，∠A=120°，

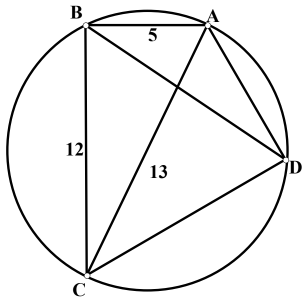
則$\overline{AD}$=____________；$\overline{CD}$ =______________。

Ans：2；$2\sqrt{7}$



[例題12] 圓內接四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=13$，$\angle A=120°$，

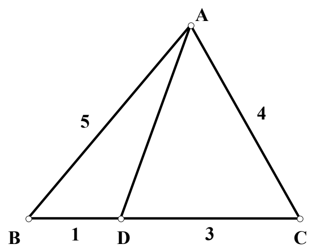
則$\overline{BD}=$？　Ans：$\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$



[例題13] ΔABC 中若滿足以下條件則其形狀為何？
(1)$2\cos B\sin A=\sin C$　(2)$a\cdot\cos A-b\cdot\cos B+c\cdot\cos C=0$
Ans：(1)等腰三角形 (2)直角三角形

[例題14] 在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$。若P，Q兩點分別在$\overline{AB}$，$\overline{AC}$上，使得$\triangle APQ$之面積為$\triangle ABC$之面積的一半，求$\overline{PQ}$的最小值。
Ans：6

(練習21) 如右圖，試求$\overline{AD}=$？Ans：$\dfrac{\sqrt{79}}{2}$



(練習22) 設ΔABC 中，AB=15，BC=20，CA=10，AD 為∠A 的分角線，試求 BD=？AD=？Ans：BD=12，AD=$3\sqrt{6}$
(提示：可以利用內分比性質)

(練習23) 設$\overline{AM}$為ΔABC 上$\overline{BC}$的中線，請證明：$\overline{AM}^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cos A)$。

(練習24) ΔABC 中，$\angle A=75^\circ$，$\overline{AB}=2\sqrt{6}$ ，$\overline{AC}=2$，D 在$\overline{BC}$上且$\angle BAD=30^\circ$，

求$\overline{AD}$=？ Ans：$\sqrt{6}$

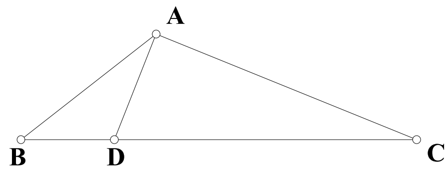
(練習25) 證明：平行四邊形 ABCD 中，對角線平方和=四個邊的平方和。

(練習26) 圓內接四邊形 ABCD，$\overline{AB}=\overline{AD}=a$，$\angle C=90^\circ$，$\angle D=105^\circ$，求對角線$\overline{AC}$=？

Ans：$\frac{(\sqrt{3}+1)a}{2}$ $\left(\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

(練習27) 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=10$，$\angle BAC=120^\circ$，

$\angle BAD=30^\circ$，則$\overline{AD}$=__________。Ans：$\frac{30\sqrt{3}}{13}$



(練習28) 設ΔABC 滿足下列條件，試分別決定其形狀：

(1)$\sin^2A+\sin^2B<\sin^2C$ (2)$\cos B\cdot\sin C=\sin B\cdot\cos C$

Ans：(1)鈍角三角形 (2)等腰三角形

(練習29) 設ΔABC 中$\angle A=60^\circ$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，今在$\overline{BC}$上取一點 D 使得$\overline{BD}=\frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$，

令 $s=\overline{AD}$，則 s^2=

(A)$\frac{1}{9}(b^2+4c^2+4bc)$ (B)$\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$ (C) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2-2bc)$

(D) $\frac{1}{9}(4b^2+c^2+2bc)$ (E) $\frac{1}{9}(4b^2+4c^2-2bc)$ (87 大學自) Ans：(B)

綜合練習

(1) 設 a，b，c 分別表△ABC 中三內角∠A，∠B，∠C 的對邊長，請選出正確的選項。（多選）

(A) 在△ABC 中，若∠A：∠B：∠C＝2：3：4，則 a：b：c＝2：3：4

(B) sin$A$：sin$B$：sin$C$＝a：b：c

(C) 若 $a^2 < b^2 + c^2$，則△ABC 為銳角三角形

(D) 若 $a^2 > b^2 + c^2$，則△ABC 為鈍角三角形

(E) 若 sin$A$：sin$B$：sin$C$＝2：3：4，則△ABC 最大內角是 80°

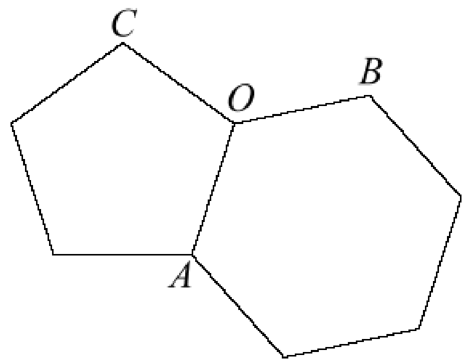
(2) 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（ 令它們的邊長均為 1）的平面圖形， 如下圖所示：
試問以下那些選項是正確的？

(1)∠BAC=54°

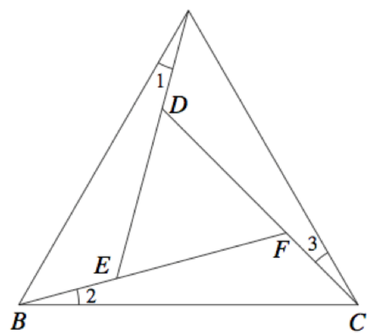
(2)O 是ΔABC 的外接圓圓心

(3)$\overline{AB}=\sqrt{3}$

(4)$\overline{BC}=2 \cdot \sin 66°$ (2006 指定乙)

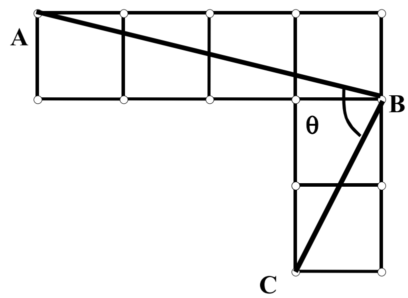


(3) 如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且∠1
已知 $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，
則正三角形 DEF 的邊長為__________。(化為最簡根式)
(2014 學科能力測驗)



(4) 在ΔABC 中，已知$\overline{BC}$=1，sinA<sinB，且 sinA 與 sinB 為 $8x^2-4\sqrt{3}\ x+1=0$ 的兩根，則ΔABC 的外接圓半徑=？

(5) 如圖，設每一小格皆為正方形，求 cosθ=？



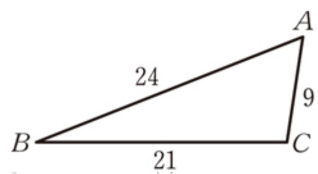
(6) 在一極坐標中，O 為極點，極軸為 $\overrightarrow{OX}$ ，已知
A[4,13°]、B[6,73°]，試求

(a)ΔOAB 的面積。 (b)$\overline{AB}$ 的長度。

(7) 如右圖，△ABC 的三邊長為 $\overline{AB}$ ＝24， $\overline{AC}$ ＝9，
$\overline{BC}$ ＝21，求：

(a) sin$A$：sin$B$：sin$C$。（化成最簡整數比）

(b) ∠A。



(c) $\triangle ABC$ 外接圓的半徑。
(d) $\triangle ABC$ 的面積。

(8) ΔABC 中，設 $a=3$，$b=4$，$\tan A=\frac{3}{4}$，求 $c=$？

(9) 設ΔABC 之三高為 $h_a=6$，$h_b=4$，$h_c=3$，則求最小內角之餘弦為____；
最小邊長=______。

(10) 四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且$\angle DAB=\angle BCD=90^\circ$，
則對角線$\overline{AC}$長為____________。(2011 年學科能力測驗)

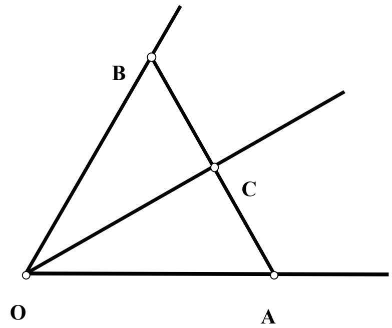
(11) 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為
(1) 24.5 公里 (2) 25 公里 (3) 25.5 公里 (4) 26 公里 (5) 26.5 公里
(2009 學科能力測驗)

(12) 圓內接四邊形 ABCD，$\overline{AB}=5$，$\angle ADC=105^\circ$，$\angle DCB=90^\circ$，$\angle ABD=60^\circ$，
求對角線$\overline{BD}$、$\overline{AC}$的長度。

(13) 在ΔABC 中，令$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CA}=b$，
(a)試利用正餘弦定理證明：$\tan A:\tan B:\tan C=\frac{1}{b^2+c^2-a^2}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$
(b)若 $\tan A:\tan B:\tan C=\frac{1}{6}:\frac{1}{19}:\frac{1}{30}$，求 $\cos A=$？

(14) ΔABC 中，$\angle A=60^\circ$，$\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=24$，則$\angle$A 的外角平分線$\overline{AD}$長為多少？

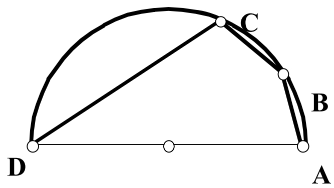
(15) 如圖，$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$，$\angle AOC=\angle BOC=30^\circ$，
試證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{3}}{c}$ 。



(16) 圓內接四邊形 ABCD，已知$\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=3$，
$\angle BCD=120^\circ$，則$\overline{AB}=$？

(17) 在ΔABC 中，M 為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且$\angle BAC=120^\circ$，
則 $\tan\angle BAM=$__________。(2007 學科)

(18) 如右圖，$\overline{AD}=4$，B,C 為以 $\overline{AD}$ 為直徑的半圓上的二點，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$，則 $\overline{CD}$=?

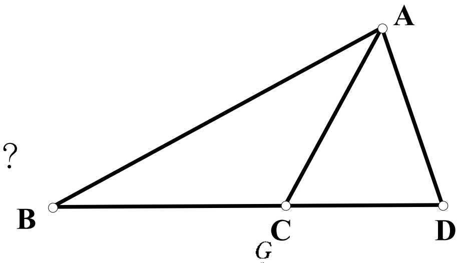


(19) 已知四邊形 ABCD 中,$\overline{AB}$=8,$\overline{CD}$=8, $\overline{AD}$=3 且$\angle ABC=\angle ADC=60°$

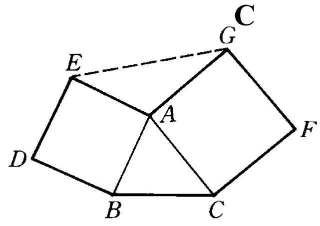
試求$\overline{BC}$之長。

(20) 已知ΔABC 三邊長分別為$\overline{AB}$=7，$\overline{BC}$=5，$\overline{AC}$=3，

延長$\overline{BC}$至 D，如右圖所示，使得$\overline{CD}$=2，則$\overline{AD}$=？



(21) 如圖，三角形 ABC 之三邊長為 $\overline{AB}$ ＝7，
$\overline{BC}$ ＝8，$\overline{CA}$ ＝9，若 ABDE，ACFG 皆為正方形，
則$\overline{EG}$ ＝_________ 。



(22) 在ΔABC 中之三邊長分別為 11,13,20，則此三角形內切圓半徑為__________；
外接圓半徑為___________ 。

(23) 郊外有甲，乙，丙三家，兩兩相距 70，80，90 公尺，今計畫公設一井，井到
三家必須等距，則此距離為________公尺。

(24) ΔABC 中，設 AB=c,BC=a,CA=b，試證下列等式：
(a)a(sinB−sinC)+b(sinC−sinA)+c(sinA−sinB)=0
(b)$\dfrac{\sin^2 B-\sin^2 C}{b^2-c^2}=\dfrac{\sin^2 A}{a^2}$
(c)(b−c)sinA+(c−a)sinB+(a−b)sinC=0
(d)$a(b\cdot\cos C-c\cdot\cos B)=b^2-c^2$

(25) 設 $a=3+t^2$，$b=3-2t-t^2$，$c=4t$
(a)若 a,b,c 均為正數，求 t 的範圍。
(b)若 a,b,c 為ΔABC 的三邊長，求 t 的範圍。
(c) 若 a,b,c 為ΔABC 的三邊長，求最大角的度量。

(26) 若 15−x、19−x、23−x 為一個鈍角三角形的三邊長，求 x 的範圍。

(27) 設∠BAC=60°，P 為其內部一點且$\overline{AP}$ =10，又 P 對於$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的對稱點分別為

Q、R，則$\overline{QR}$=？

(28) 在ΔABC 中，$\overline{AB}$=10,$\overline{AC}$=9,cos∠BAC=$\dfrac{3}{8}$。設點 P、Q 分別在邊 AB、AC 上使

得ΔAPQ 之面積為ΔABC 面積之一半，則$\overline{PQ}$之最小可能值為___________ 。
(化成最簡分數)　(2009 學科能力測驗)

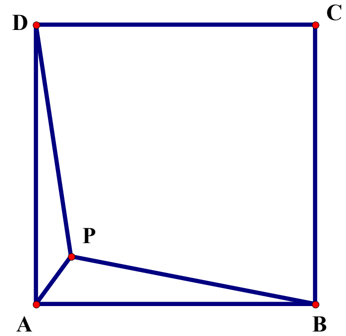
(29) 在(凸)四邊形 ABCD 中，已知$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=x$，且對角線 $\overline{AC}=4$，請選出正確的選項：

(1)$\cos\angle ABC\geq\frac{3}{7}$　(2)$\cos\angle BAD>\cos\angle ABC$　(3)x 可能為 1　(4)$x<\frac{13}{2}$

(5)若 A、B、C、D 四點共圓，則 $x=\frac{7}{4}$。(2014 指定甲)

進階問題

(30) 在銳角三角形 ABC 中，設∠A=30°，若以$\overline{BC}$為直徑作圓，此圓交$\overline{AB}$於 P 點，交$\overline{AC}$於 Q 點，試求(a)$\overline{PQ}:\overline{BC}$　(b)$\frac{\text{四邊形PBCQ的面積}}{\Delta\text{APQ的面積}}$。



(31) 在正方形內部有一點 P，且$\overline{PA}=1$，$\overline{PB}=3$，$\overline{PD}=\sqrt{7}$，如圖所示，求正方形 ABCD 的面積。

(32) ΔABC 中，周長為 20，$\angle A=60^\circ$，外接圓的半徑為 $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 則求各邊的邊長 a,b,c，又三角形的內切圓半徑為何?

(33) 設ΔABC 之三邊長為$\sqrt{3}$,x , y，且邊長$\sqrt{3}$之對角為 60°，試求 $x+y$ 的範圍。

(34) 設凸四邊形 ABCD 之對角線 AC=p，BD=q，兩對角線之交角為θ 。

(a)試證：凸四邊形 ABCD 之面積=$\frac{1}{2}pq\sin\theta$

(b)若 AC+BD=10，則凸四邊形 ABCD 面積之最大值為何？

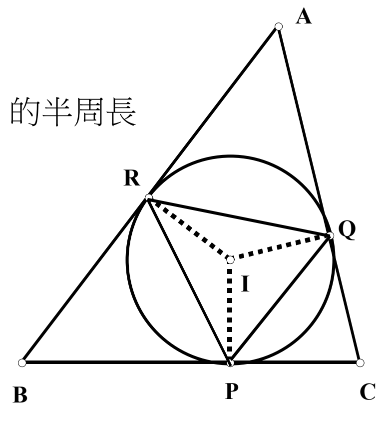
(35) ΔABC 中，設 $a=2,b=1$

(a)當ΔABC 面積最大時，求 c。(b)當∠B 最大時，求 c。

(36) 設 ABCD 為半圓內接四邊形，$\overline{AD}$為直徑長為 d，若$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，試證明：d 為方程式 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 的一根。

(37) 試證明：ΔABC 的內切圓半徑 $r=(s-a)\tan\frac{A}{2}$。　s=ΔABC 的半周長

(38) 如圖，設ΔABC 之內切圓半徑為 r，外接圓半徑為 R，內切圓切三邊於 P,Q,R，則 $\frac{\Delta\text{PQR的面積}}{\Delta\text{ABC的面積}}$之值為何？



(39) 設圓內接四邊形 ABCD 四邊之長分別為$\overline{\mathrm{AB}}=a$，$\overline{\mathrm{BC}}=b$，$\overline{\mathrm{CD}}=c$，$\overline{\mathrm{AD}}=d$，試證：

(a)$\overline{\mathrm{AC}}^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$。

(b)$\overline{\mathrm{BD}}^2=\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$

(c)$\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}=ac+bd$。(Ptolemy 定理)

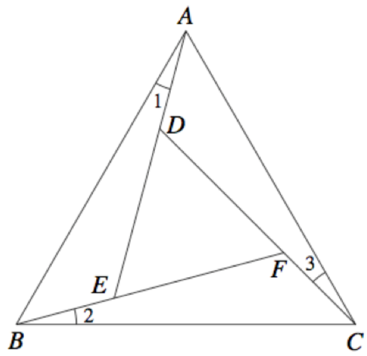
(40) 若 $x=\sqrt{y^2-16}+\sqrt{z^2-16}$，$y=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{z^2-9}$，$z=\sqrt{y^2-36}+\sqrt{x^2-36}$，則 $x+y+z=$？

綜合練習解答

(1) (B)(D)

(2) (2)(3)(4)

(3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$



[解法]：

$\angle 1=15°$，$\angle ABE=45°$，$\angle BEA=120°$

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin 45^\circ}$，而$\overline{AD}=\overline{BE}$

所以正三角形 DEF 的邊長$\overline{DE}$

$=\overline{AE}-\overline{AD}=\dfrac{\sin 45°}{\sin 120°}-\dfrac{\sin 15°}{\sin 120°}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$。

(4) $\sqrt{3}+1$

(5) $\dfrac{2}{\sqrt{85}}$

(6) (a)$6\sqrt{3}$ (b)$\sqrt{28}$

(7) (a)7：3：8 (b)60° (c)$7\sqrt{3}$ (d)$54\sqrt{3}$

(8) 5 或$\dfrac{7}{5}$

(9) $\dfrac{7}{8}$；$\dfrac{16\cdot\sqrt{15}}{15}$

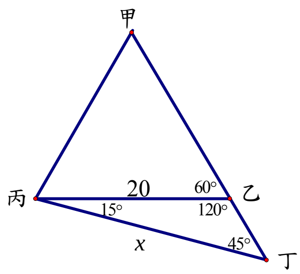
(10) $\sqrt{32}$

(11) (1)

依照題意可作圖如右：假設丙丁之間的距離為 x，

則由正弦定理有 $\dfrac{x}{\sin 120°}=\dfrac{20}{\sin 45°}$，

故 $x=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\approx 24.4978$，即最接近 24.5 公里。



(12) $\overline{BD}=10$、$\overline{AC}=\dfrac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$

(13) (a)$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$、$\sin B=\dfrac{b}{2R}$、$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$、$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$、$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(b)利用(a)的結果求出 $a：b：c$，再計算 $\cos A=\dfrac{1}{5}$。

(14) 40

(15) [提示：考慮ΔAOB=ΔAOC+ΔBOC，再利用三角形的面積公式，即可得證]

(16) 8

(17) $5\sqrt{3}$

(18) $\frac{7}{2}$

(19) 3 或 5

(20) $\sqrt{7}$

(21) 14

(22) 3，$\frac{65}{6}$

(23) $21\sqrt{5}$

(24) (a)(b)(c)利用正弦定理將 sinA、sinB、sinC 化成$\frac{a}{2R}$、$\frac{b}{2R}$、$\frac{c}{2R}$。代入式子中運算。(d)利用餘弦定理。

(25) (a)$0<t<1$ (b)$0<t<1$ (c)120°

(26) $3<x<11$

(27) $10\sqrt{3}$ [提示∠QAR=120°]

(28) $\frac{15}{2}$

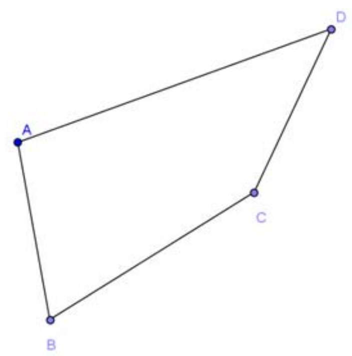
因為△APQ 與△ABC 共用一個 $\angle A$，這兩個三角形的面積比為其共角夾邊的乘積比，即欲使△APQ 之面積為△ABC 面積之一半，則須 $\overline{AP}\times\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=45$。

假設 $x=\overline{AP}$，$y=\overline{AQ}$，$t=\overline{PQ}$。△APQ 中，$t^2=x^2+y^2-2xy\cos A$。因為 $x^2+y^2\ge 2xy=90$，所以，$t^2\ge 90-\frac{135}{4}=\frac{225}{4}\Rightarrow t\ge\frac{15}{2}$。

(29) (4)(5)

[解法]：

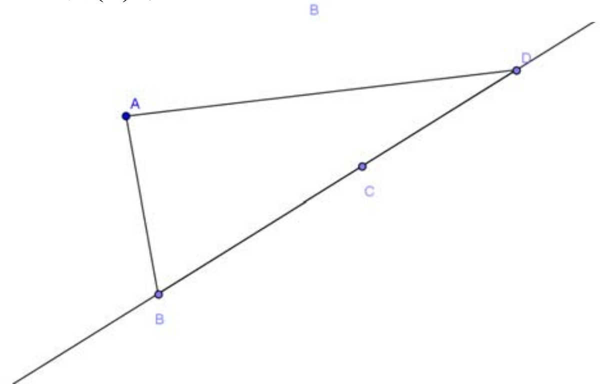
令 ∠ABC=θ⇒ $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\,\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{9}{24}<\frac{3}{7}$，故(1)不正確



∵ ΔABC 為等腰三角形，∴ ∠BAD>∠ABC⇒cos∠BAD<cos∠ABC，故(2)不正確

$x+4>3, x+3>4$，$x-4<3$ ⇒$1<x<7$，故 x 不可能為 1，故(3)不正確

(4)當 BCD 三點共線時，在ΔABD 中，cos∠ABC=$\frac{9}{24}$，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，利用餘弦

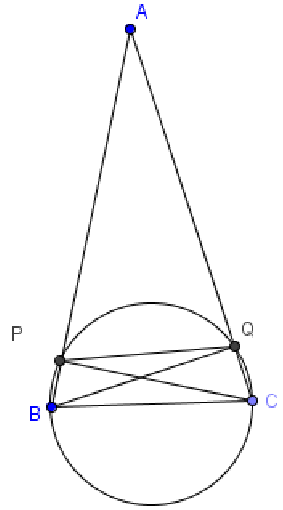


公式可得$\overline{AD}=\frac{13}{2}$，故 $x<\frac{13}{2}$。

(5) 若 A、B、C、D 四點共圓，$\angle ABC=\theta$，$\angle ADC=180°-\theta$

$\Rightarrow 4^2=3^2+x^2-2\cdot x\cdot 3\cdot\cos(180°-\theta)\Rightarrow x=\frac{7}{4}$。故選(4)(5)

(30) (a)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b)$\frac{1}{3}$



(a)$\angle BCP=90°-\angle B$，$\angle BCP+\angle PCQ=\angle C$

$\Rightarrow\angle PCQ=\angle B+\angle C-90°=150°-90°=60°$

$\frac{\overline{PQ}}{\sin\angle PCQ}=\overline{BC}\Rightarrow\overline{PQ}:\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b)$\overline{AQ}=\sqrt{3}\ \overline{BQ}$，$\overline{AP}=\sqrt{3}\,\overline{PC}$，$\because\angle AQB=\angle APC=90°$

$\therefore$

$\frac{\text{四邊形PBCQ的面積}}{\Delta\text{APQ的面積}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{PC}\cdot\overline{BQ}\cdot\sin 30^\circ}{\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin 30^\circ}=\frac{1}{3}$。

(31) $8+\sqrt{14}$

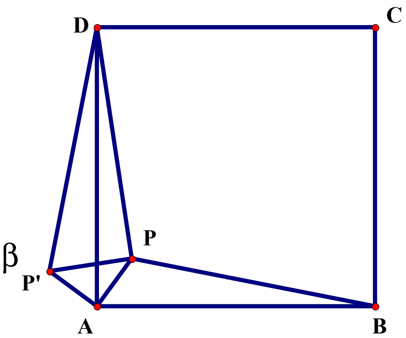
將ΔABP 繞 A 點逆時針旋轉 90° 得$\Delta ADP'$

$\overline{AP}=\overline{AP'}=1$，且$\angle PAP'=90°\Rightarrow\overline{PP'}=\sqrt{2}$

在$\Delta DPP'$中，$\overline{DP}^2+\overline{PP'}^2=7+2=9=\overline{DP'}^2$

$\Rightarrow\angle DPP'=90°$

所以$\angle DPA=90°+45°=135°$。



在ΔADP 中使用餘弦定理$\Rightarrow\overline{AD}^2=8+\sqrt{14}$。

[另解]：令$\angle DAP=\alpha$，$\angle BAP=\beta$，$\overline{AD}=x$

根據餘弦定理：

$(\sqrt{7})^2=1^2+x^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos\alpha$，$3^2=1^2+x^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos\beta$

$\alpha+\beta=90°$，所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$

$\Rightarrow(\frac{x^2-6}{2x})^2+(\frac{x^2-8}{2x})^2=1\Rightarrow$解得 $x^2=8+\sqrt{14}$。

(32) $a=7$，$b=8$，$c=5$ 或 $a=7$，$b=5$，$c=8$ $r=\sqrt{3}$

(33) $\sqrt{3}<x+y\le 2\sqrt{3}$

[提示：根據餘弦定理$=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy\Rightarrow(x+y)^2=3(xy+1)$，因為 $xy=x^2+y^2-3\ge 2xy-3\Rightarrow xy\le 3\Rightarrow(x+y)^2=3(xy+1)\le 12$]

(34) (b)$\frac{50}{4}$ [提示：利用 $pq\le\frac{1}{4}(p+q)^2$]

(35) (a)$\sqrt{5}$ (b)$\sqrt{3}$ (提示：(b)$\cos B=\frac{c^2+3}{2c}=\frac{1}{2}(c+\frac{3}{c})\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$)

(36) [提示：$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，因為$\angle ACD=90^\circ$，$\cos D=\frac{c}{d}$，代

入前面的式子化簡即可得證]

(37) [提示：只需證明$\overline{AR}=s-a$ 即可]

(38) $\dfrac{r}{2R}$

[提示：如(37)題圖，

$\Delta PQR=\Delta RQI+\Delta RPI+\Delta PQI=\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-A)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-B)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-C)=\frac{1}{2}$

$r^2(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{1}{4R}r^2(a+b+c)=\frac{r^2s}{2R}$，$\Delta ABC=rs$]

(39) [提示：利用$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，而且$\angle B+\angle D=180^\circ$]

(40) $\dfrac{24\sqrt{15}}{5}$

由已知做一三角形，其邊長分別為 x,y,z，則 $h_x=4$，$h_y=3$，$h_z=6$