第一章 三角

§1−1 直角三角形的邊角關係

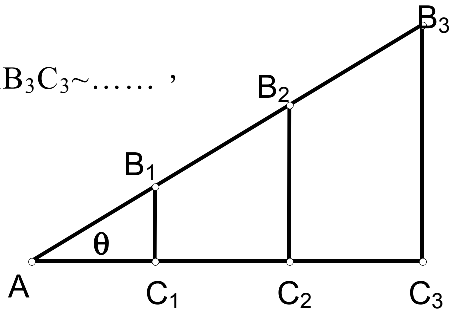
(甲)正弦、餘弦與正切的定義

相似三角形其三邊長的比都是定值，若是將相似的直角三角形擺放如右圖，並且讓相同的內角∠A 重疊，只要∠A 固定，則這些直角三角形三邊長的比例是固定的。即

給定一銳角∠A，因為直角$\triangle AB_1C_1\sim\triangle AB_2C_2\sim\triangle AB_3C_3\sim\ldots\ldots$，

所以$\dfrac{B_1C_1}{AB_1}=\dfrac{B_2C_2}{AB_2}=\dfrac{B_3C_3}{AB_3}\cdots$

故上述的比值只受∠A 的大小影響。



換句話說當銳角$\angle A$ 的度數固定時，作直角$\triangle ABC$($\angle C$ 為直角)，那麼所作的三角形，其邊長大小不論如何改變，相異兩邊長的比值：$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$與$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$是不會改變的。這些不變的比值，分別稱為$\angle A$ 的正弦，餘弦與正切。

(1)正弦、餘弦與正切的定義：

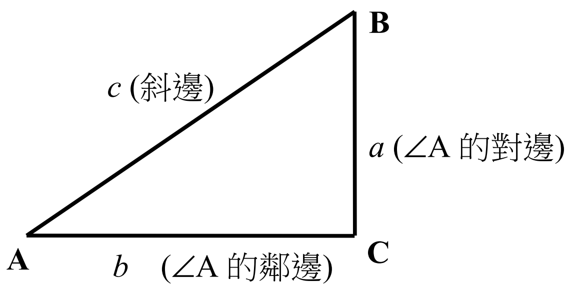
設ΔABC 為直角三角形，其中∠C 為直角三角形，$\overline{AB}$為斜邊，兩股$\overline{BC}$與$\overline{AC}$分別是∠A 的對邊與鄰邊。

設$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，

∠A 的**正弦(讀做 sineA)**=sinA= $\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$

∠A 的**餘弦(讀做 cosineA)**=cosA= $\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$

∠A 的**正切(讀做 tangentA)**=tanA= $\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$



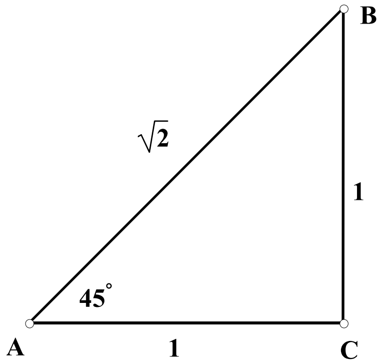
例如：

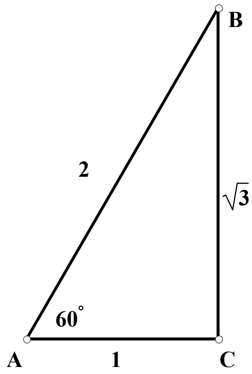
直角三角形 ABC 各邊為 $c=13$，$a=12$，$b=5$

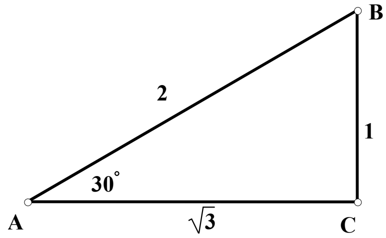
依據定義：sinB= $\dfrac{5}{13}$ ，cosB= $\dfrac{12}{13}$ ，tanB= $\dfrac{5}{12}$

另一方面：如果$\angle A$ 的度量是 θ，則 sin$A$ 也可記為 sinθ。

(練習1) 特殊角的三角函數值：







請根據上面的圖形，填完下表：

∠A	sinA	cosA	tanA
30°			
45°			
60°			

[例題1] 一直角三角形 ABC 中，設$\overline{AC}$=41，$\overline{AB}$=40，$\overline{BC}$=9，令∠BAC=θ，
試求 sinθ 、cosθ 、tanθ。

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 中，若已知其中一個，由畢氏定理我們就可以求出其它兩個。

[例題2] 直角三角形 ABC 中，已知 tanA =2，試求 sinA、cosA。
Ans： $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

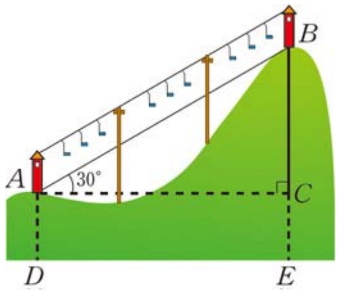
[例題3] 設銳角三角形 ABC 的垂心(三高的交點)，若以 b 表示$\overline{AC}$的長度，則線段$\overline{AH}$的長度等於

(1) $\dfrac{b\cos A}{\sin B}$ (2) $b\cos A\sin B$ (3) $b\cos A\cos B$ (4) $\dfrac{b\cos A}{\tan B}$ (5) $b\cos A\tan B$。

Ans：(1)

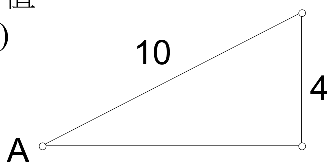
(練習2) 如圖，A，B 兩個纜車站的距離為 1000 公尺，$\overline{AB}$ 的坡度是 30°，如果車站 A 的標高 $\overline{AD}$ 是 450 公尺，求車站 B 的標高 $\overline{BE}$ 是多少公尺？

Ans：950 公尺

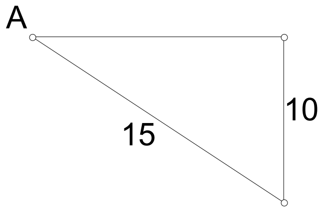


(練習3) 在下列各直角三角形中，分別計算 sinA，cosA，tanA 之值。

(1)



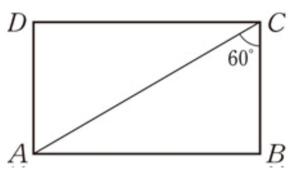
(2)



Ans：(1)$\sin A=\dfrac{2}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$，$\tan A=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

(2)$\sin A=\dfrac{2}{3}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(練習4) 有一長方形 $ABCD$，$\overline{AB}=9$，且對角線 $\overline{AC}$ 與邊 $\overline{BC}$ 的夾角為 60°，求此長方形的面積。Ans：$27\sqrt{3}$



(練習5) 設θ為銳角且 $\tan\theta=\sqrt{2}$，則 $\sin\theta=$__________，而 $\cos\theta=$__________。

Ans：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(練習6) 設θ為一銳角，$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$，試求 $\tan\theta=$_______，$\sin\theta=$_____。

Ans：$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(乙)正弦、餘弦與正切的關係

由上一節知，若三角形△ABC 中，∠C=90°，∠A 的度數為θ，以 a,b 與 c 分別表示三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$與$\overline{AB}$之長，則可發現正弦、餘弦與正切並非毫不相干，而是具有某些關聯的。

根據前面對於正弦、餘弦與正切的定義，可以得知：

$\sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$。

◆ 商數關係

$\because\ \sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

上述關係稱為 sinθ、cosθ與 tanθ的**商數關係**。

◆ 平方關係

$\because\ \sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$

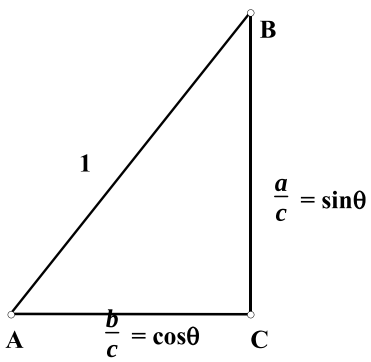
$\therefore (\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=(\dfrac{a}{c})^2+(\dfrac{b}{c})^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=1(\because a^2+b^2=c^2)$

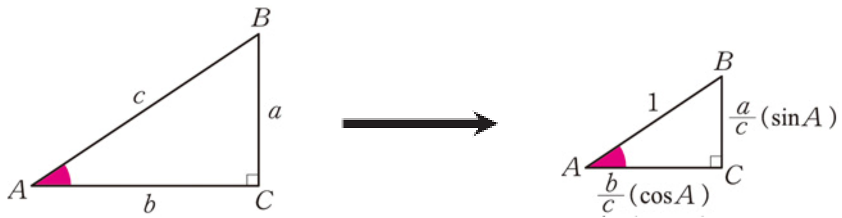
$(\sin\theta)^2$ 通常寫成 $\sin^2\theta$，$(\cos\theta)^2$ 通常寫成 $\cos^2\theta$。

故 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

上述關係稱為 sinθ與 cosθ的**平方關係**。

注意：$\sin^2\theta=(\sin\theta)^2$　$\cos^2\theta=(\cos\theta)^2$



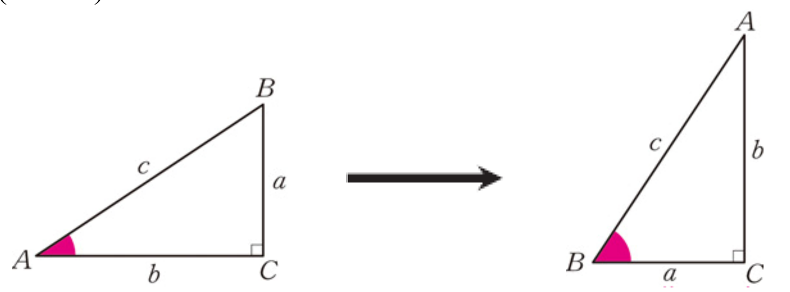


◆ 餘角關係：

上述的直角三角形 ABC 中，∠C=90°，∠A+∠B=90°，我們可以觀察∠A 的對邊剛好為∠B 的鄰邊，∠A 的鄰邊剛好是∠B 的對邊，由正弦和餘弦函數的定義

$\sin B=\dfrac{\angle B\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\cos A$。

即 $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$



同理 $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$。

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$與 $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$，稱為 $\sin\theta$與 $\cos\theta$的**餘角關係**。

結論： 正弦、餘弦與正切的關係 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 餘角關係：$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$與 $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

上述各種關係對於任意銳角θ都成立，根據這些關係，可以得知只要知道 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$中之一個，就可推得其它的值。

[例題4] 已知θ為銳角且 $\tan\theta=\dfrac{5}{6}$，試求 $\sin\theta$，$\cos\theta$之值。

Ans：$\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{61}}$，$\cos\theta=\dfrac{6}{\sqrt{61}}$，

(練習7) 試以銳角分別填入下列空格中：

(1) $\sin 73°=\cos$（　）。　(2) $\cos 80°=\sin$（　）。

(2)求 $\sin^2 17°+\sin^2 73°$之值。

Ans：(1)17°、10° (2)1

(練習8) 直角△ABC 中，$\angle C=90°$，若 $\cos A=\dfrac{1}{4}$，求 $\sin A$，$\tan A$ 之值。

Ans：$\frac{\sqrt{15}}{4}$、$\sqrt{15}$

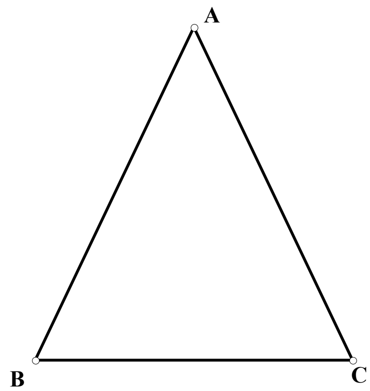
(練習9) 設θ為銳角，且令 $\tan\theta=k$，請用 k 表示下列各三角函數的值：

(1)$\cos\theta$　(2)$\sin\theta$　Ans：(1)$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(2) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

[例題5] (等腰三角形內角的正弦、餘弦與正切)

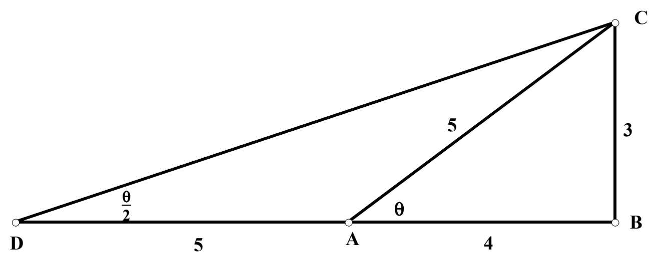
如圖，有一等腰三角形 ABC，其中$\overline{AB}=\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=4$

請問 tanB=？　sinB=？　Ans：$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan B=2\sqrt{2}$



[例題6] 設θ為銳角，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，試求 $\sin\frac{\theta}{2}$、$\cos\frac{\theta}{2}$。

Ans：$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$



[例題7] (基本關係的應用)

設 $0°<\theta<90°$，試證明：

(1)$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$。

(2)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$。

[例題8] (基本關係的應用)

設θ為銳角，且 $2\sin\theta+\cos\theta=2$，求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 。

Ans：$\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$

[例題9] (基本關係的應用)

設θ為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$，求下列各小題的值：

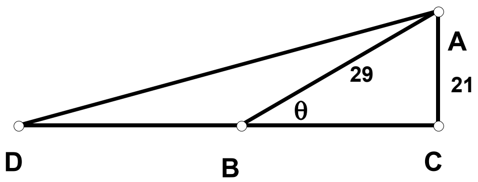
(1)$\sin\theta\cdot\cos\theta$ (2)$\sin\theta-\cos\theta$ (3)$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 。

Ans：(1)$\frac{7}{18}$ (2)$\frac{\pm\sqrt{2}}{3}$ (3)$\frac{22}{27}$

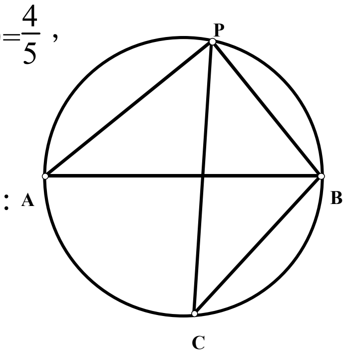
(練習10) 於ΔABC 中，$\angle A$ 為直角，$\overline{AB}=\overline{AC}$，D 是$\overline{AC}$的中點令$\angle DBC=\theta$，則 $\tan\theta=$_____。　Ans：$\dfrac{1}{3}$

(練習11) 如圖，若 $\sin\theta=\dfrac{21}{29}$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$的值。

Ans：$\dfrac{3}{7}$



(練習12) 如圖，$\overline{AB}$為直徑且$\overline{AB}=10$，令$\angle PCB=\theta$，已知 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，求 PA=？Ans：PA=6



(練習13) 設θ為銳角，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，請計算下列各小題的值：

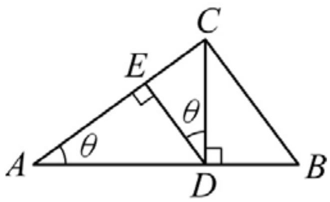
(1)$\sin\theta\cdot\cos\theta$　　(2)$\sin\theta+\cos\theta$

Ans：(1)$\dfrac{3}{8}$　(2)$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(練習14) 假設 $\cos\theta+3\sin\theta=2$，且 $0<\theta<90°$，求 $\cos\theta+\sin\theta$之值。Ans：$\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$

(練習15) 已知 $0°<\theta<90°$，試證明：$\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$。

(練習16) 直角△ABC 中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$，自 C 作$\overline{CD}$垂直$\overline{AB}$於 D，作$\overline{DE}$垂直$\overline{AC}$於 E，則$\overline{DE}$的長為________。Ans：$\dfrac{48}{25}$

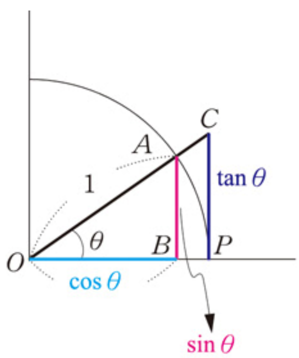


(丙)正弦、餘弦與正切的增減關係

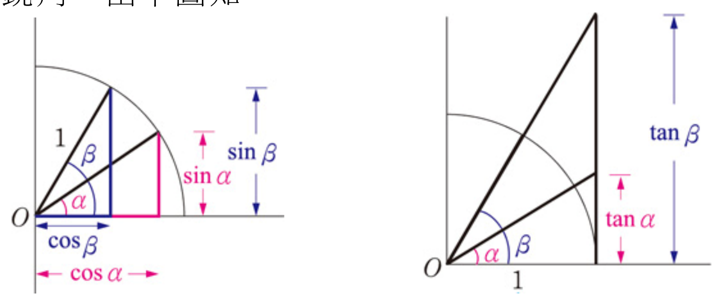
前面談到特別角的正弦，我們知道當 θ 由 30° 增大到 45°，再增大到 60°時，$\sin\theta$ 的值由$\dfrac{1}{2}$增大到$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，再增大到$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。一般情形，當銳角 θ 增大時，$\sin\theta$ 的值是否也會增大呢？而 $\cos\theta$，$\tan\theta$ 又如何？

右圖是以 O 為圓心的四分之一單位圓(半徑為 1 的圓稱為單位圓），其中$\angle AOP=\theta$，A，P 在圓上，$\overline{AB}$ 垂直 $\overline{OP}$ 於 B 點，過 P 點與單位圓相切的直線交直線 OA 於 C 點，

則 $\sin\theta=\overline{AB}$，$\cos\theta=\overline{OB}$，$\tan\theta=\overline{PC}$。



設 α，β 都是銳角，由下圖知：



(a) (b)

若 $\beta>\alpha$，則 $\sin\beta>\sin\alpha$，$\cos\beta<\cos\alpha$（圖(a)），且 $\tan\beta>\tan\alpha$（圖(b)）。

實際上，因為 $\sin\alpha$ 隨銳角 α 增大而增大，所以由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可知 $\cos\alpha$ 隨 α 增大而減小；再進一步，由 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 亦可知 $\tan\alpha$ 隨 α 增大而增大。

結論：

(1)當銳角 θ 遞增時，正弦、餘弦與正切的遞增（以↗表示）或遞減（以↘表示）如下表所示：

$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
↗	↘	↗

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}>\dfrac{\sin\theta}{1}=\sin\theta$。

[例題10] 設θ為銳角，試討論何時，$\cos\theta>\tan\theta$。

Ans：當θ滿足，$0<\sin\theta<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$時，$\cos\theta>\tan\theta$。($\theta$約為 38.17°)

(練習17) 試比較下列各數的大小：

$\sin 18°$，$\cos 18°$，$\tan 18°$，$\sin 72°$，$\cos 72°$，$\tan 72°$。

〔提示：先比較 $\cos 30°$與 $\tan 30°$的大小，再比較 $\cos 18°$與 $\tan 18°$的大小〕

Ans：$\sin18°=\cos72°<\tan18°<\cos18°=\sin72°<\tan72°$

(練習18) 試比較下列的大小關係：

(1)$\cos50°$______$\cos25°$　(2)$\sin52°$______$\cos52°$

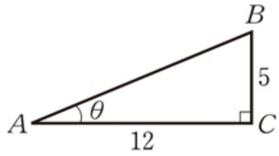
(3)$\sin73°$______$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4)$\cos68°$______$\dfrac{1}{2}$

(5)$\cos45°$______$\tan45°$　(6)$\tan25°$______1.1

Ans：(1)< (2)> (3)> (4)< (5)< (6)<

綜合練習

(1) 如右圖，△ABC 為直角三角形，∠C＝90°，∠A＝θ，若 $\overline{AC}$ ＝12，$\overline{BC}$ ＝5，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 之值。



(2) 設 θ 為銳角，且 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，試求：

(a) $\sin\theta$ 與 $\tan\theta$ 之值。　　(b) 比較 θ 與 60°的大小。

(3) 試求下列各式的值：

(a)$2\cos^2 30°-1$ (b)$2\sin30°\cos30°$

(c)$\dfrac{2\tan30°}{1-\tan^2 30°}$ (d)$\tan45°+\sqrt{3}\tan60°-\sin^2 30°$

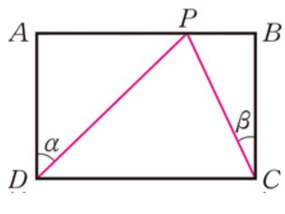
(4) 設△ABC 為等腰三角形，若頂角∠A＝40°，底邊 $\overline{BC}$ ＝12，則下列選項中何者可用以表示底邊上的高？（單選）

(A) 6 sin 20°　(B) 6 cos 20°　(C) 6 tan 20°
(D) 6 tan 70°　(E) 6 cos 40°

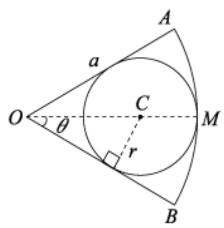
(5) 在直角三角形 ABC 中，∠C＝90°，∠A＝θ，若 $\overline{AB}$ ＝20，試分別依下列各條件，求 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 之長。

(a) $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$。　(b) $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$。　(c) ∠B＝2θ。

(6) 求一個半徑 r 的圓內接正 n 邊形與圓外切正 n 邊形的周長。



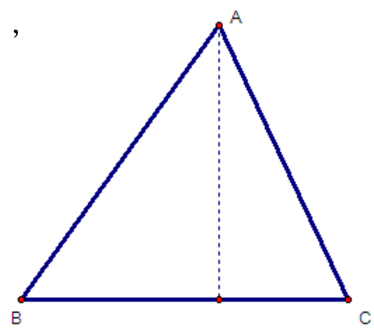
(7) 如右圖，在矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ ＝12 公分，$\overline{BC}$ ＝8 公分，P 點在 $\overline{AB}$ 上移動，但 P 點異於 A，B 點，求 $\tan\alpha+\tan\beta$ 之值。



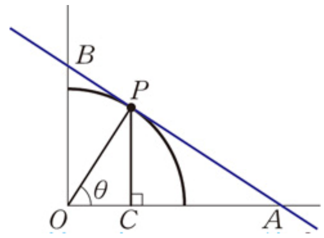
(8) 如下圖所示：扇形 OAB 中，$\overline{OA}$=$\overline{OB}$＝a，∠AOB=2θ，已知扇形的內切圓半徑為 r，若以 a 及θ表內切圓半徑 r，則 r＝__________；又若θ＝30°，則比值 $\dfrac{a}{r}$ ＝__________。

(9) 銳角三角形 ABC 中，已知 $\sin B=\dfrac{4}{5}$、$\sin C=\dfrac{12}{13}$，若 $\overline{AB}$=15，

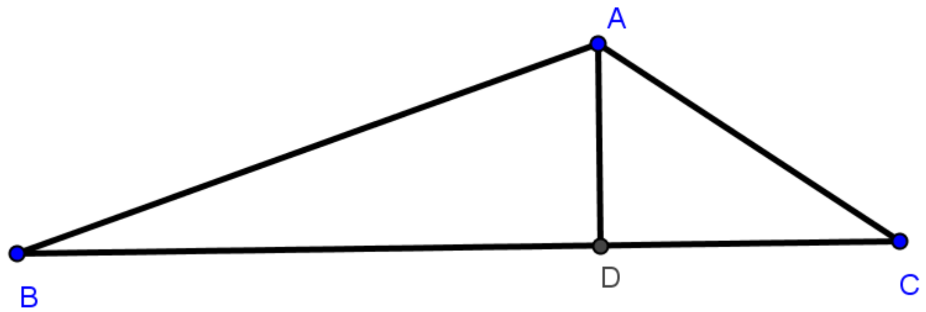
試求(a)$\overline{AC}$=？　(b)ΔABC 的面積。



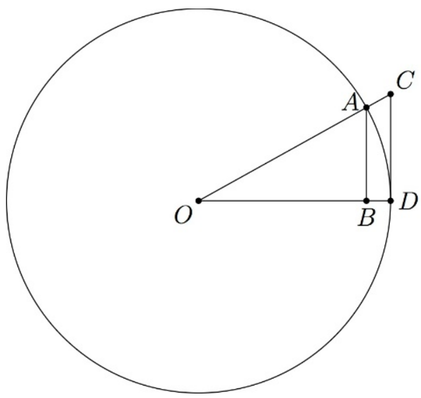
(10) 右圖是以 O 為圓心的四分之一單位圓，P 為其上一點，直線 AB 是過 P 點與單位圓相切的直線，$\overline{PC}$ 垂直直線 OA 於 C 點。設 $\angle POA=\theta$（$0°<\theta<90°$），試分別以單一線段長表示 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$。



(11) 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，已知 $\overline{AB}=15$，$\tan B=\dfrac{7}{24}$，$\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，則 $\overline{BC}$=？



(12) 設圓 O 之半徑為 24，$\overline{OC}=26$，$\overline{OC}$ 交圓 O 於 A 點，$\overline{CD}$ 切圓 O 於 D 點，B 為 A 點到 $\overline{OD}$ 的垂足，如右邊的示意圖。則 $\overline{AB}$ =____________。
(化為最簡分數)　(2014 學科能力測驗)



(13) 設 $\tan\theta=3$，求
(a)$\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}$　(b)$\dfrac{2\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}$。

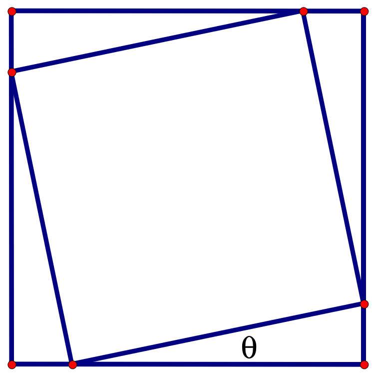
(14) 若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，試求下列各值：
(a)$\sin\theta\cos\theta$　(b)$\sin\theta+\cos\theta$　(c)$\sin\theta$、$\cos\theta$。

(15) 設θ為銳角且 $7\sin\theta-\cos\theta=5$，求 $\sin\theta$=？

(16) 設θ為銳角，若 $\sin\theta$、$\cos\theta$為方程式 $5x^2-7x+k=0$ 的兩根，試求下列各值：
(a)$\sin\theta+\cos\theta$　(b)$\sin\theta\cos\theta$　(c)k　(d)$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(17) 設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，則求下列各小題的值：
(a)$\sin\theta\cdot\cos\theta$=_____。(b)$\sin\theta-\cos\theta$=______。
(c)$\sin^3\theta+\cos^3\theta$=______。(d)$\sin^6\theta+\cos^6\theta$=_______。

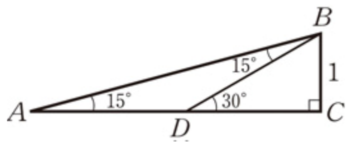
(18) 有一塊正方形的壓克力版，其中有一個角落附近有瑕疵，現在要將它依右圖的方式截成一塊較小的正方形壓克力，小正方形的邊與大正方形的邊成一個角度θ ($0<\theta<45°$)使得其面積為原來面積的$\frac{3}{4}$，試問 $\tan\theta=$_______ 。



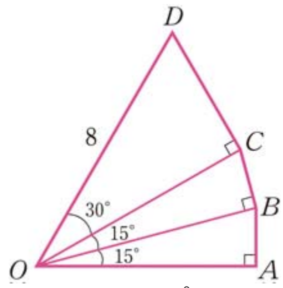
(19) 作一直角三角形 ABC，使得$\angle A=15°$，如右圖。若作$\angle ABD=15°$，且 D 點在 $\overline{AC}$ 上，故得$\angle BDC=30°$，若 $\overline{BC}=1$，試求：

(a) $\overline{CD}$，$\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$ 之長。

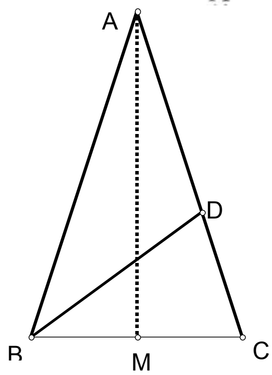
(b) sin 15°，cos 15°，tan 15°之值。



(20) 右圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD}=8$，請利用上題(b)的數據求直角三角形 OAB 的高 $\overline{AB}$ 之長。

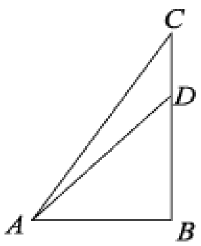


(21) △ABC 是一個頂角為 36°的等腰三角形，$\overline{AM}$與$\overline{BD}$分別是∠A 與∠B 的分角線，如右圖所示。試利用△BCD~△ABC，求 sin18°之值。



進階問題

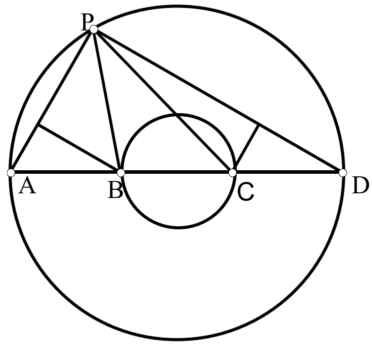
(22) 如圖，$\angle B=90°$，$3\overline{CD}=2\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，則 $\tan\angle CAD$ 之值為__________ 。



(23) 設ΔABC 中，$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$，$\cos\angle ACB=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$之中點 M，而$\overline{AH}\perp\overline{BC}$於 H，若$\overline{MH}=5$，求$\overline{BC}=$？

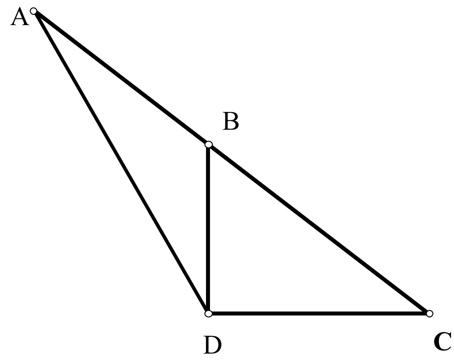
(24) 銳角ΔABC 之三邊長為 a,b,c，其所對應的高為 h_a , h_b , h_c，已知 tanA=1，tanB=2，tanC=3，則$\frac{abc}{h_ah_bh_c}=$？

(25) 有二同心圓，外圓之一直徑 AD，被內圓三等份於 B、C，(如圖)，在外圓上任取異於 A,D 之一點為 P，設∠APB=α，∠DPC=β，試求 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$之值。



(26) 設 $x\cos\theta + y\sin\theta = 4$，$x\sin\theta - y\cos\theta = 3$，試求 x 與 y 的關係。

(27) 如右圖，$\angle BDC=90^\circ$，$\angle ADB=30^\circ$，A、B、C 共線，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=1$，求 $\overline{BC}$ 的長。



綜合練習解答

(1) $\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=\frac{12}{13}$，$\tan\theta=\frac{5}{12}$

(2) (a)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (b)$\theta>60°$

(3) (a)$\frac{1}{2}$ (b)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c)$\sqrt{3}$ (d)$\frac{15}{4}$

(4) (D)

(5) (a)15，$5\sqrt{7}$ (b)12，16 (c)10，$10\sqrt{3}$

(6) $2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$，$2nr\tan\frac{180^\circ}{n}$

(7) $\frac{3}{2}$

(8) $r=\frac{a\sin\theta}{1+\sin\theta}$；3

(9) (a)13 (b)84

(10) $\overline{PC}$、$\overline{OC}$、$\overline{PA}$

(11) $\frac{33}{2}$

(12) $\frac{120}{13}$

[解法]：

設$\angle AOB=\theta$，$26\sin\theta=\overline{CD}=24\tan\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{12}{13}$，

$\therefore\overline{AB}=24\sin\theta=\frac{120}{13}$。

(13) (a)9 (b)2 [Hint：(a)分子、分母同除以 $\cos\theta$ (b) 分子、分母同除以 $\cos^2\theta$]

(14) (a)$\frac{4}{9}$ (b)$\frac{\sqrt{17}}{3}$ (c)$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{6}$、$\cos\theta=\frac{\sqrt{17}-1}{6}$

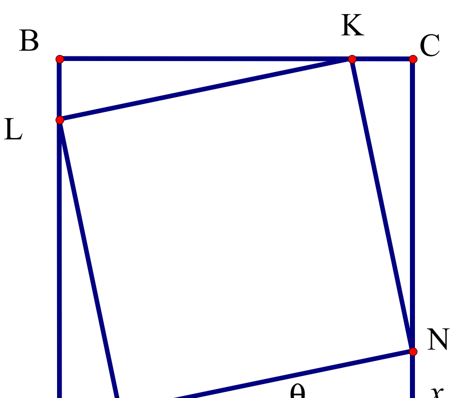
(15) $\frac{4}{5}$ [Hint：$\cos\theta=7\sin\theta-5$，兩邊平方，再利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，化成 $\sin\theta$的二次方程式，再解出 $\sin\theta$]

(16) (a)$\frac{7}{5}$ (b)$\frac{12}{25}$ (c)$\frac{12}{5}$ (d)$\frac{91}{125}$

(17) (a)$-\frac{1}{4}$ (b)$\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ (c)$\frac{5\cdot\sqrt{2}}{8}$ (d) $\frac{3}{16}$

(18) $3-2\sqrt{2}$

[解法]：設大正方形邊長為 1，



則小正方形邊長為$\frac{\sqrt{3}}{2}$，令$\overline{\mathrm{ND}}=x$

因為ΔMDN、ΔNCK 全等，所以$\overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{CN}}=1-x$

故$\frac{3}{4}=x^2+(1-x)^2\Rightarrow x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$($\frac{2+\sqrt{2}}{4}$不合)

$\tan\theta=\frac{x}{1-x}=3-2\sqrt{2}$。

(19) (a)$\sqrt{3}$、2、$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (b)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$、$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$、$2-\sqrt{3}$

(20) $\sqrt{3}$

(21) $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(22) $\frac{1}{4}$

(23) $\overline{\mathrm{BC}}=22$

(24) $\frac{5}{3}$ (Hint：考慮$\frac{c}{h_a},\frac{b}{h_c},\frac{a}{h_b}$的值)

(25) $\frac{1}{4}$ [提示：$\tan\alpha=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{PE}}$，$\tan\beta=\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{PF}}$]

(26) $x^2+y^2=25$

(27) $\sqrt[3]{2}$

補充教材

(甲)∠A 的餘切、正割與餘割的定義：

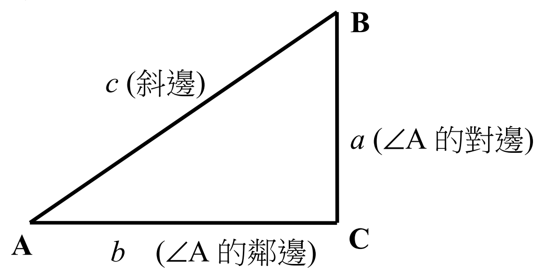
設ΔABC 為直角三角形，∠C 為直角，$\overline{AB}$為斜邊，兩股$\overline{BC}$與$\overline{AC}$

分別是∠A 的對邊與鄰邊，定義∠A 的三角函數如下：

∠A 的**餘切**=cotA= $\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$

∠A 的**正割**=secA= $\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

∠A 的**餘割**=cscA= $\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{c}{a}$



根據定義可以得知：
cotA 與 tanA 互為倒數、secA 與 cosA 互為倒數、cscA 與 sinA 互為倒數。

(乙)基本關係：

(1)倒數關係：

(a) $\sin\theta \times \csc\theta=1$　(b)$\cos\theta \times \sec\theta=1$　(c)$\tan\theta \times \cot\theta=1$

(2)平方關係(利用畢式定理可得)

(a) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　(b) $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$　(c)$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(3)餘角關係：(直角三角形的兩銳角互為餘角關係)

(a)$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　(b)$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$　(c)$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$

(d)$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$　(e)$\sec(90°-\theta)=\csc\theta$　(f)$\csc(90°-\theta)=\sec\theta$

(4)商數關係：

(a)$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　(b)$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(5) 銳角三角函數範圍：

若 $0°<\theta<90°$，則

(a)$0<\sin\theta<1 \Rightarrow$倒數 $\csc\theta>1$

(b)$0<\cos\theta<1 \Rightarrow$倒數 $\sec\theta>1$

(c)$\tan\theta$、$\cot\theta$任意正數