

§2-2 排列與組合

(甲)直線排列

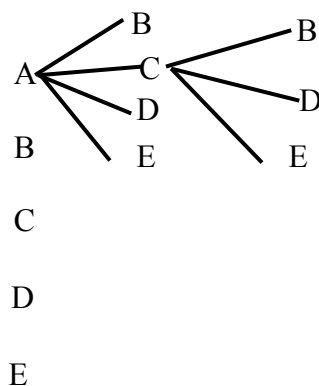
◆ 引入直線排列：

例子：

從建中高一某班 5 個同學中，選出 3 人排成一列，有幾種排法？

解法：

5 個同學以 ABCDE 表示，選出 3 人排成一列，我們將這個過程，分成 3 個步驟，配合樹狀圖，可得排法共有 $5 \times 4 \times 3$ 種方法。



數學上，將這樣的排列方法稱為在 5 個不同的事物中，選取 3 個安排到 3 個不同的位置，符號上以 P_3^5 來表示。
即 $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3$ 。

◆ 直線排列的定義：

從 n 個不同的物件中，選取 m 個物件 ($1 \leq m \leq n$) 安排到 m 個不同的位置，共有 $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ 種方法，這樣的方法數用 P_m^n 來表示。

即 $P_m^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ [n 往下乘 m 個]。

為了方便表示，規定 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ， $0! = 1$ ，因此

$$P_m^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)\dots 2 \cdot 1}{(n-m)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}。$$

特別 $P_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$ 。

結論：

(1) 從 n 個不同的事物中，選取 m 個物件 ($1 \leq m \leq n$) 安排到 m 個不同的位置，共有 P_m^n 種方法。

$$(2) P_m^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}。$$

例子： $3! = 6$ ， $4! = 24$ ， $5! = 120$ ， $6! = 720$

$$\text{例子：} P_4^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}, P_4^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{6!}$$

[例題1] 請計算下列各小題：

(1) $2P_3^n = 3 \cdot P_2^{n+1} + 6P_1^n$ ，求 $n = ?$ (2) $5P_n^9 = 6P_{n-1}^{10}$ ，求 $n = ?$

Ans : (1) $n=5$ (2) $n=7$

[例題2] 請求出下列各小題的方法數：

(1) 甲乙丙三人在排成一列的 8 個座位中，選坐相連的三個座位，則有幾種坐法？

(2) 9 個人組成一個少棒隊，已知三、四棒的人選已定，而投手與捕手要安排在第七、八、九棒，請問教練可以排出幾種不同的打擊順序？

Ans : (1) 36 (2) 720

(練習1) 設 $P_3^{n+1} = 10P_2^{n-1}$ ，求 $n = ?$ Ans : $n=4$ 或 5

(練習2) 若 $2P_{n-2}^8 = P_n^8$ ，則 $n = ?$ Ans : 8

(練習3) 請證明： $P_r^n = P_r^{n-1} + r P_{r-1}^{n-1}$ 。

這個式子可以做這樣的解釋：

假設 50 個人中含有一人為甲，則從 50 個人中選取 6 個之排列數為 P_6^{50} 。

利用加法原理，可將這樣的過程分成兩類：

不含甲之排列數為 P_6^{49} 與含甲的排列數為 $P_1^6 \times P_5^{49}$ (某甲先選座位，剩下 5 個座位再由其他 49 人選取排列)。因此可得 $P_6^{50} = P_6^{49} + P_1^6 \times P_5^{49}$ 。

(練習4) 某桌球隊要從 10 名選手中排出 5 名，分別參加五場單打友誼賽，10 名選手中近況特佳的有 3 位，教練決定任意安排他們分別在第一、三、

五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共可以有【 】種。 Ans：252

(練習5) 甲、乙、丙三人在排成一列的八個座位中選坐三個座位，但不能三個座位全相連，共有【 】種坐法。 Ans：300

(練習6) 將三個不同的球，放入五個不同的箱子中，但每箱最多放一球，則有多少種不同的放法。 Ans：60

(乙)有相同物的直線排列與重複排列

◆ 有相同物的直線排列：

例子：四個英文字母 AAAB 排成一列，請問有幾種排法？

[方法]：

先將 AAA 這三個相同的字母視為不同，設為 $A_1A_2A_3$ 所以先視為 $A_1A_2A_3B$ 這 4 個不同字母的排列，共有 $4!$ 種，如下所示：

$A_1A_2A_3B$ ， $A_1A_3A_2B$ ， $A_2A_1A_3B$ ， $A_2A_3A_1B$ ， $A_3A_1A_2B$ ， $A_3A_2A_1B$

$A_1A_2BA_3$ ， $A_1A_3BA_2$ ， $A_2A_1BA_3$ ， $A_2A_3BA_1$ ， $A_3A_1BA_2$ ， $A_3A_2BA_1$

$A_1BA_2A_3$ ， $A_1BA_3A_2$ ， $A_2BA_1A_3$ ， $A_2BA_3A_1$ ， $A_3BA_1A_2$ ， $A_3BA_2A_1$

$BA_1A_2A_3$ ， $BA_1A_3A_2$ ， $BA_2A_1A_3$ ， $BA_2A_3A_1$ ， $BA_3A_1A_2$ ， $BA_3A_2A_1$

但是當我們將 $A_1A_2A_3$ 還原成 AAA 的時候 $A_1A_2A_3B$ ， $A_1A_3A_2B$ ， $A_2A_1A_3B$ ， $A_2A_3A_1B$ ， $A_3A_1A_2B$ ， $A_3A_2A_1B$ 以上 6 種排列情形，均代表同一種 AAAB。換

句話說 $3!$ 種的排列要視為同一種，因此排列方法有 $\frac{4!}{3!}=4$ 種。

結論：

設有 n 件物品，共有 k 種不同種類，第一類有 m_1 個，第二類有 m_2 個，……，第 k 類有 m_k 個。(此處 $n=m_1+m_2+m_3+\dots+m_k$)，此處此 n 件物品排成一列，

共有 $\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$ 種不同的排法。

例如：用 3 個相同的紅球，2 個相同的黃球，4 個相同的黑球，排成一列有幾種排法？

[解法]： $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!}$

◆ 重複排列的定義：

例子：

用 12345 五個字母排成一個三位數，

(1) 數字可重複，可作出幾個三位數？

(2) 數字不可重複，可作出幾個三位數？

[解法]：

(1) 百位數、十位數、個位數都有 5 種方法 $\Rightarrow 5^3$ 種三位數字。(重複排列)

(2) 百位數、十位數、個位數分別有 5、4、3 種方法 $\Rightarrow 5 \times 4 \times 3$ 種三位數字。

從 m 種不同之事物(每種事物的個數超過 n 個)選取 n 個安排到 n 個不同的位置 (n, m 無大小關係), 但可以重複選取, 這種計數方式稱為**重複排列**, 排列方法有 m^n 個。

[例題3] 請求出下列各小題的排列數：

- (1)有 10 位選舉人, 3 位候選人, 採計名投票, 每人都要投一票(沒有廢票), 請問有候選人得票的情形有幾種?
- (2)一個多重選擇題, 有 A,B,C,D,E 五個選項, 請問答案有幾種型式?
- (3)10 名學生要爭奪 3 項比賽的錦標, 請問得到冠軍的可能性有幾種?
- (4)5 個人於十字路口話別後, 同時離開(沒有 5 人同走一條路) 共有幾種可能情形?

Ans : (1) 3^{10} (2) 2^5-1 (3) 10^3 (4) 4^5-4

◆ 有限制條件之排列：

- (a)若要求 k 個人相連, 先將這 k 個人視為一整體, 排定後再排此 k 個人。
- (b)若要求 k 個人分開, 則先排其他人, 在將這 k 個人安排至其他人的空隙中。
- (c)考慮反面計算：全部方法-不合的方法。
- (d)應用取捨原理。
- (e)應用 1-1 原理。
- (f)利用遞迴方法。

[例題4] 甲乙丙丁等 7 人排成一列, 請求出下列情形的方法數：

- (1)甲乙丙三人相鄰 (2)甲乙丙分開 (3)甲乙相鄰, 丙丁不相鄰
- (4)甲乙相鄰, 甲丙不相鄰

Ans : (1) $3! \times 5! = 720$ (2) $4! \times P_3^5 = 1440$ (3) $4! \times 2! \times P_2^5 = 960$ (4)1200

[例題5] **pallmall** 一字中各字母排成一列

(1)有幾種排法？(2)所有之 l 皆相鄰而兩個 a 分開。

(3)其中三個 l 在一起，另一 l 分離

Ans：(1)840(2)36 (3)240

[例題6] 用 0,1,2,3,4,5 作相異數字之四位數，請求出滿足下列要求的四位數個數？

(1)數字相異四位數 (2)偶數 (3)3 的倍數 (4)4 的倍數 (5)5 的倍數。

Ans：(1)300 (2)156 (3)96 (4)72 (5)108

[例題7] A,B,C,D,E,F,G 排成一列，求下列排列數：

(1)A,B,C 順序不變 (2)A 在 B,C 之前

(3)A 在 B 之前，F 在 G 之後 (4)A,B 在 C,D,E 之前

Ans：(1)840 (2)1680 (3)1260 (4)504

[例題8] 有 5 封不同的信件，投入甲乙丙丁 4 個不同的郵筒，則甲乙丙三郵筒均至少投入一封郵件的投法有幾種？ Ans：390

[例題9] 鳴放氣笛作信號，長鳴一次需 4 秒，短鳴一次需 1 秒，每次間隔時間為 1 秒，請問 30 秒的時間可作出多少種的信號？ Ans：235

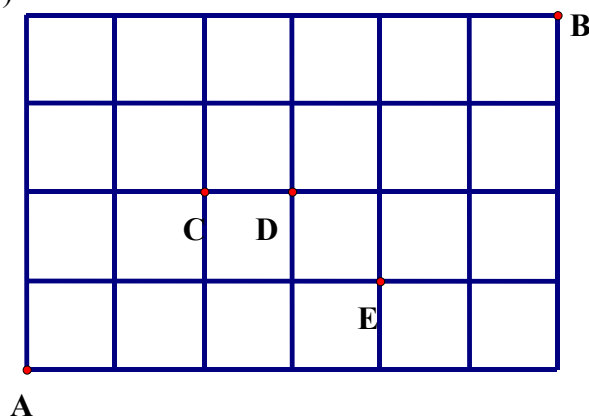
[1-1 原理]：

[遞迴方法]：

[例題10] 如圖，一人走捷徑由 A 到 B(即只能走→↑)

- (1)走捷徑有幾種走法？
- (2)若每次需經過 D，其走法有幾種？
- (3)若不經過 C 且不經過 D，其走法有幾種？

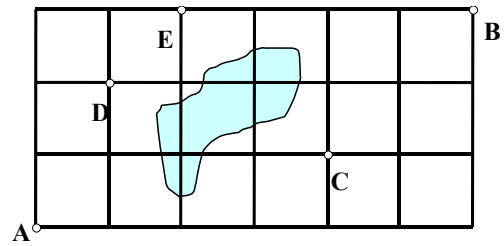
Ans：(1)210 (2)100 (3)80



[例題11] 如圖，由 A 走到 B 走捷徑，但不走斜線部分區域之路徑，依下列情形求走法數。

(1)經 C (2)經 D (3)自由走但不經斜線區域。

Ans : (1)50 (2)8 (3)23



[例題12] (錯排問題)

設 $1, 2, 3, \dots, n$ 這 n 個數重新排成一列為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，若 $a_i \neq i$ ，我們稱之為 n 的錯排，它的個數以 g_n 來表示， $g_1=0$ ， $g_2=1$

請找出數列 $\{g_n\}$ 的遞迴關係式。

Ans : $g_n = (n-1)(g_{n-1} + g_{n-2})$ ， $n \geq 3$

(練習7)一對新婚夫妻家庭有 6 人排成一列拍結婚照，但新婚夫妻一定排在中間的兩個位置，請問共有幾種排法？ Ans：48

(練習8)有 4 個女生 3 個男生排成一列，若要求男生排在一起，女生排在一起，則其排列方法有 _____ 種；若要求男女相間隔排列，排列方法有 _____ 種，3 個男生要分開排列的方法有 _____ 種。
Ans：288，144，1440

(練習9)甲乙丙丁戊己六人排成一列，求下列的排列數？
(1)乙丙均與甲相鄰 (2)甲乙相鄰，甲丙不相鄰 (3)甲乙丙中恰二人相鄰
Ans：(1)48 (2)192 (3)432

(練習10)某班一天有七節課，每一節課均排不同的科目，其中體育課不排第四節，數學課不排第七節，請問這一天的課表有幾種排法？ Ans：3720

(練習11) 用 2,3,4,5,6 五個數字排成三位數
(1)數字可以重複，有多少個不同的三位數。
(2)數字不可以重複，則所有三位數的和=?
Ans：(1)125 (2)26640

(練習12) 二位數中：(1)個位數字>十位數字共有幾個？(2)十位數字>個位數字共右幾個？ Ans：(1)36 (2)45

(練習13)設 A,B,C,D 等十人排成一列，規定 A,B 不排首，C,D 不排末之方法有幾種？
Ans：8！×58
[提示：全部-(A,B 排首)-(C,D 排末)+(A,B 排首且 C,D 排末)]

(練習14)七本書分給 10 個人，每人至多一本
(1)書本相同有幾種分法？ (2)書本不同有幾種分法？
Ans：(1)120 (2)604800

(練習15)甲，乙，丙，…，庚等 7 人排成一列，甲在乙的左方，且在丙的左方有 _____ 種排法。 Ans：1680

(練習16)LKKLMM 排成一列，要求同字不相鄰，方法有幾種？ Ans：30

(練習17)pontoon 一字，各字母排成一列，求下列各排列數：
(1)全部任意排成一列 (2)三個「o」完全在一起
(3)恰有兩個「o」在一起 (4) 三個「o」完全分開
Ans：(1)420 (2)60 (3)240 (4)120

(練習18)factoring 中各字母，每次全取排列
(1)母音保持 a,o,i 之順序有幾種排法？
(2)母音保持 a,o,i 之順序，同時子音保持 f,c,t,r,n,g 之順序有幾種排法？

Ans : (1) $\frac{9!}{3!}$ (2) $\frac{9!}{3!6!}$

(練習19) cabbage 一字，各字母排成一列，其中相同字母不相鄰，有幾種排法？

Ans : 660 [提示：考慮反面情形的計算]

(練習20) 一樓梯有 8 級，某人上樓，每步走一級或二級或三級，則此人上樓的方法有幾種？ Ans : 81

(練習21) 設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是 1,2,3,4,5 的一種排列(例如 13254,15432,... 等均是 1,2,3,4,5 的一種排列)求滿足下列各式的排列數：

(1) $(2-a_4)(1-a_3)=0$ (2) $(1-a_1)(3-a_3) \neq 0$ (3) $(1-a_1)(2-a_2)(3-a_3)(4-a_4)(5-a_5) \neq 0$

Ans : (1)42 (2)78 (3)44

(練習22) 7 個不同的書本分贈給 4 人，請求依下列情形分配的方法有幾種？

(1) 甲至少分得一本書。 (2) 甲恰得一本書

(3) 甲至少二本書 (4) 每人至少一本書

Ans : (1) $4^7 - 3^7$ (2) 7×3^6 (3) $4^7 - 3^7 - 7 \times 3^6$ (4) $4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 \cdot 1^7 + 1 \cdot 0^7$

(練習23) 5 本不同的玩具，分贈給甲乙丙 3 人，每人至少得一件之方法有幾種？

Ans : 150

(練習24) 渡船三隻，每船可載 6 人，則(1) 8 人過渡，有 _____ 種安全渡法。(2) 7 人過渡，但甲坐 A 船，有 _____ 種安全渡法。

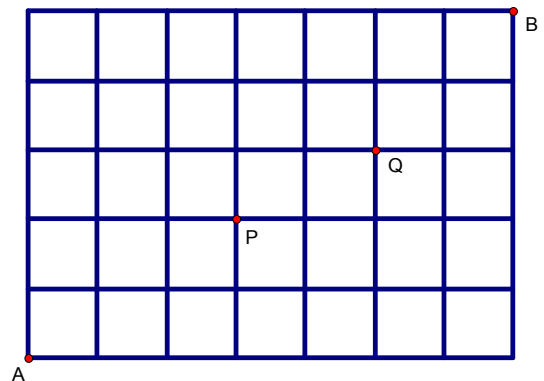
Ans : (1) 6510 (2) 728

(練習25) 棋盤街道如右圖，南北街道有 8 條，東西街道有 6 條，某人自 A 取捷徑走到 B，下列走法各有多少種？

(1) 走捷徑 (2) 必須經過 P

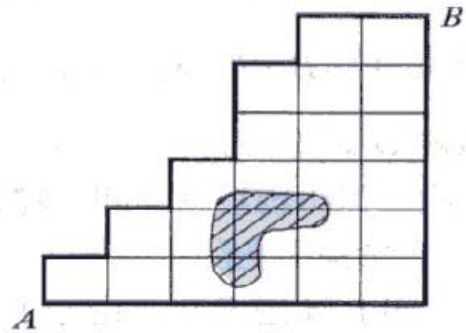
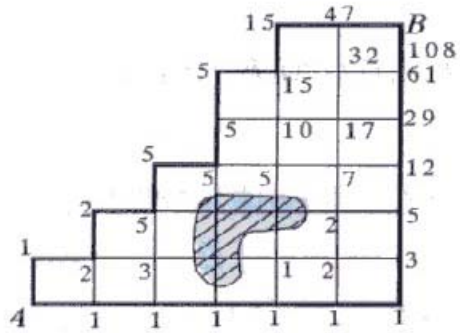
(3) 必須經過 P 與 Q (4) 不許經過 P, Q

Ans : (1)792 (2)350 (3)180 (4)286



(練習26) 如右圖，由 A 走到 B 取捷徑。但不許經過斜線區之方法有幾種？

Ans : 108



(練習27) 在坐標平面上，自 $A(-4,-3)$ 走捷徑到 $B(3,3)$ ，

(1) 要經過第二象限，請問有幾種走法？

(2) 不經過原點有幾種走法？

(1) 經第二象限的走法

$$= (A-P-B) + (A-Q-B) + (A-R-B)$$

$$= \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{6!}{4!2!} + \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{6!}{5!1!} + \frac{7!}{1!6!} \cdot 1$$

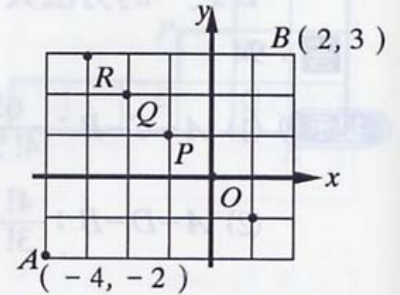
$$= 35 \times 15 + 21 \times 6 + 7 \times 1$$

$$= 525 + 126 + 7 = 658$$

(2) 不經原點 = (全部) - (經原點)

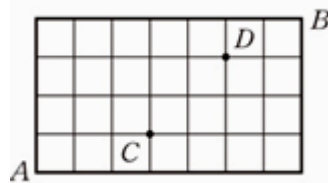
$$= \frac{13!}{7!6!} - \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 1716 - 700$$

$$= 1016$$



綜合練習(一)

- (1) 若 $P_n^{10} = 6P_{n-2}^{10}$ ，求 n 之值。
- (2) 甲、乙、丙、丁等 7 人排成一列，試求下列排法各有幾種：
- 任意排。
 - 甲、乙、丙三人須排在一起。
 - 甲、乙、丙三人必須完全分開。
 - 甲、乙相鄰，丙、丁不相鄰。
- (3) 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法有_____種。
(2013 指定乙)
- (4) 將 *builder* 一字之字母排列，試求下列排法各有多少種：
- 子音與母音必須相間隔。
 - 母音皆不相鄰。
- (5) 將 7 張椅子排成一列，現有 5 個人入坐，每人只坐一張椅子。試問：
- 坐法有幾種？
 - 5 個人必須連坐在一起的坐法有幾種？
- (6) 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有_____種。(2006 學科)
- (7) 從 0, 1, 2, 3, 4, 5 六個數字中，選取 4 個排成四位數 (數字不可重複)。
- 共可排成多少個四位數？
 - 共可排成多少個偶數？
 - 共可排成多少個 4 的倍數？
 - 這些四位數的總和是多少？
- (8) 有相同的白球 5 個，紅球 2 個，黑球 1 個。試問：
- 將此 8 球排成一列，且兩端都是白球的排法有幾種？
 - 從此 8 球中取出 7 球排成一列，排法有幾種？
- (9) 甲、乙、丙、丁、戊、己六人排成一列，試求下列排列法各有幾種：
- 甲在乙之左方。
 - 甲在乙、丙之右方。
- (10) 將「一寸光陰一寸金」七個字排列，同字不相鄰的排法有幾種？
- (11) 由 A 地到 B 地的街道是棋盤式，如右圖，某人沿著街道以走捷徑的方式由 A 地到 B 地，試問：
- 共有多少種走法？
 - 經過 C 且經過 D 的走法有多少種？
 - 經過 C 或經過 D 的走法有多少種？



- (12) 用長 4 公分與 3 公分兩種紙條，自上往下黏成長 16 公分的紙條，若每一連結處為 1 公分，試問共有幾種連結法？
- (13) 將 5 件不同的獎品，分給甲、乙、丙、丁四人，求下列分法各有幾種？(獎品必須全部分完)
- (a) 任意給 (每人可得多於 1 件、可不得)。
 - (b) 甲恰得一件。
 - (c) 甲至少得一件。
 - (d) 甲、乙均至少得一件。
- (14) 用 0, 1, 2, 3, 4 五個數字，作出數字可重複的四位數共有多少個？其中有相同數字者有多少個？

綜合練習解答

- (1) 9
- (2) (a)5040 (b)720 (c)1440 (d)960
- (3) 120
- (4) (a)144 (b)1440
- (5) (a)2520 (b)360
- (6) 576
- (7) (a)300 (b)156 (c)72 (d)979920
- (8) (a)60 (b)168[提示：將 8 球排成一列後，將最後 1 球拿掉，即為任取 7 球的排列法，共有 $\frac{8!}{5!2!} = 168$ (種)。]
- (9) (a)360 (b)240
- (10) 660[提示： $\frac{7!}{2!2!} - 2 \times \frac{6!}{2!} + 5! = 660$ (種)。]
- (11) (a)330 (b)72 (c)236
- (12) 28
- (13) (a) $4^5=1024$ (b)405 (c)781 (d)570
- (14) 500、404

(丙)組合

◆ 組合的意義：

例子：

從建中高一某班 5 個同學中，選出 3 人參加辯論比賽，有幾種選法？

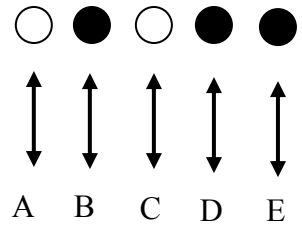
[解法一]：(以分類的觀點)

5 個同學以 ABCDE 表示，先考慮選出 3 人排成一列，配合樹狀圖，可得排法共有 $P_3^5=5 \times 4 \times 3$ 種方法。但選人的觀點是不論次序的，即 ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA 是算一樣的，都是選中 ABC 三個人，因此每 3! 種排法算成一種，因此從 5 個人中，選取 3 個人(不考慮排列順序)的

方法有 $\frac{P_3^5}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$ 種。

[解法二]：(以 1-1 原理的觀點)

如圖，將 A,B,C,D,E 與 3 個黑球,2 個白球做對應，對到黑球的人被選取，我們可以得知不同的排法會對應不同的選取方法，而不同的選取方法會對應不同的排法，即排法與選取的方法一樣多，因此 5 個人中選取 3 人的方法有 $\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$ 種。



(1)組合的定義：

從 n 個不同的事物中，選取 m 個($1 \leq m \leq n$)，共有

$\frac{P_m^n}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$ 種方法。

(分子由 n 往下乘 m 個，分母由 1 往上乘 m 個)

將這樣的方法數，用 C_m^n 來表示。

即 $C_m^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ 。

例如： $C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3}$ ， $C_0^n = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ ， $C_n^n = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$ ，

(2)組合的性質：

用組合的觀點解釋性質：

(a)要從 ABCDE 中選出三人去打掃環境，今抽籤決定，籤的作法有兩種：一種是五支籤中，3 支籤做記號，抽中的人去打掃，其抽中的組合數為 C_3^5 ；另一種是五支籤中，2 支作記號，抽中的人不去打掃，其抽中的組合數為 C_2^5 ，故可得 $C_3^5 = C_2^5$ 。

(b)要從 ABCDE 中選出三人去打掃環境，今有 C_3^5 種選法，選出來的 3 人之中，我們可分成兩類：第一類是若 A 去打掃，則必須從其他 4 人中再選 2 人一起打掃，其組合數共有 C_2^4 種方法；第二類是若 A 沒去打掃，則從其他 4 人中選 3 人去打掃，其組合數共有 C_3^4 種方法，所以 $C_3^5 = C_2^4 + C_3^4$

(a) $C_m^n = C_{n-m}^n$

(b) 巴斯卡定理： $C_m^n = C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1}$ $1 \leq m \leq n-1$

[證明]：

$$\begin{aligned}
C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-m+m)}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_m^n.
\end{aligned}$$

例如： $C_{7}^{10} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = C_3^{10}$ 。 $C_6^{10} = C_6^9 + C_5^9$ 。

[例題13] 求下列各小題的 n 值：

(1) $12C_4^{n+2} = 7C_3^{n+4}$ (2) $C_n^{10} = C_{3n-2}^{10}$ (3) $11C_{n-3}^n = 24C_{n-1}^{n+1}$

Ans : (1) $n=6$ (2) $n=1$ 或 3 (3) 10

[例題14] (1)請計算 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^{19}$ 的值。

(2)請計算 $C_0^2 + C_1^3 + C_2^4 + \dots + C_8^{10}$ 的值。

Ans : (1) 1140 (2) 165

[例題15] 自棒球選手 6 人，游泳選手 7 人中選出 4 人擔任福利委員

(1)選法有幾種？ (2)至少有 2 位游泳選手之選法有幾種？

Ans : (1) 715 (2) 560

[例題16] 從 1~20 這 20 個號碼中，取出 4 個數使得這四個數都不是相鄰的正整數。
Ans : C_{4}^{17}

(練習28) 設 $C_{n-1}^{2n} : C_n^{2n-2} = 132 : 35$ ，則 $n = ?$ Ans : $n = 6$

(練習29) 設 n, r 均為自然數，且 $C_r^{n-1} : C_r^n : C_r^{n+1} = 6 : 9 : 13$ ，則數對 $(n, r) = ?$
Ans : $(n, r) = (12, 4)$

(練習30) 求 $C_0^1 + C_1^2 + C_2^3 + \dots + C_{12}^{13} = ?$ Ans : C_2^{14}

(練習31) 某拳擊比賽，規定每位選手和其他選手各比賽一場，賽程總計為 45 場，請問有幾位選手參加比賽？ Ans : 10

(練習32) 從男生 4 人和女生 3 人中，排出 3 名男生和 2 名女生並排成一列，請問有幾種排法？ Ans : 1440

(練習33) 凸 20 邊形有幾條對角線？ Ans : 170

(練習34) 從 1, 2, 3, ..., 10 中選出 3 個相異數 a, b, c 滿足 $a < b < c$ 的 (a, b, c) 有幾組？
Ans : 120

(練習35) 一列火車從第一車至第十車共有十節車廂。要指定其中 4 節車廂安裝行動電話，則共有幾種指定的方法？若更要求此四節車廂兩兩不相銜接，則共有幾種指定方法？ Ans : 210 , 35

(練習36) 由 1 到 20 的自然數中取出不同的三個數，則
(a) 取出的三數成等差的取法(不考慮排列)有幾種？
(b) 取出的三數中沒有二個連續整數的取法有幾種？
(c) 取出的三數乘積為偶數的取法有幾種？
Ans : (a)90 (b)816 (c)1020

(練習37) 某次考試，規定 13 題中選做 10 題，求下列各選法？
(1) 任意選 (2) 前兩題必須作答
(3) 前五題必須選做 3 題且只做 3 題 (4) 前 5 題中至少選做 3 題。
Ans : (1)286 (2)165 (3)80 (4)276

(練習38) 平面上有 15 個相異點，其中除了 7 點共線外，其他各點之中任三點不共線，任意連接各點，則可決定

(1)多少條直線？ (2)多少個線段？ (3)多少個三角形？

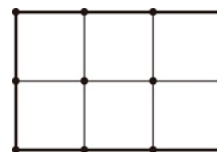
Ans：(1)85 (2)105 (3)420

(練習39) 右圖中的每個小格皆為全等的正方形，試問圖中 12 個點

(1) 可作出幾條直線？

(2) 可決定幾個三角形？

Ans：(1)35 (2)200



(練習40) 5 對夫妻中選出 4 人，

(1)恰有 2 對夫妻 (2)恰有一對夫妻 (3)4 人皆沒有夫妻關係。

Ans：(1)10 (2)120 (3)80

(丁)重複組合

◆ 重複排列與重複組合

例子：ABCD 等 4 人到麥當勞點 1~6 號套餐，每個人限點一份套餐，請問：

(a)這 4 個人有幾種點餐的情形？ (b)店員有幾種給餐點的方式？

[說明]：

(a)ABCD 每個人都有 6 種套餐可點，故這 4 個人有幾種點餐的情形共有 6^4 種。

(b)就店員而言，他不在乎每個人點了那些餐，他只在乎每種套餐被點了幾次，因此假設第 i 號餐被點了 x_i 次，其中 x_i 為非負整數，

不定方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$ 的非負整數解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

就代表一種店員給餐點的方式。

故只要能求出方程式有幾個非負整數解，就可以求出店員有幾種給餐點的方式。

從另一個角度來看，店員給餐點的方式也可以看成是 1~6 號套餐重複選取出 4 份套餐的方式。

如何求 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$ 非負整數解個數？

$$|| \bigcirc \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \longrightarrow (0,0,2,1,1,0)$$

$$| \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \longleftarrow (0,1,1,1,1,0)$$

非負整數解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 可以和 5 個 | 與 4 個 O 的排列情形 1 對 1 對應，

因此非負整數解個數 = $\frac{9!}{4!5!} = C_4^9$

(從 9 個不同的位置，選取 4 個位置，排入 4 個 O)

[重複排列與重複組合]

設(A,1)代表 A 點了 1 號餐，設有兩種點法(A,1)(B,3)(C,1)(D,2)

與(A,3)(B,1)(C,2)(D,1)，在(a)中他代表兩種點餐的方式，換句話說 1,3,1,2 與 3,1,2,1 是有順序的，不過就店員而言，都代表 1 號餐 2 份，2 號餐 1 份，3 號

餐 1 份，因此店員給餐的方式都一樣，也就是沒有順序可言。在(a)中我們可以重複點套餐，但是有順序的，即 1,1,3,2、1,3,2,1、...是不同的，這是**重複排列**；而(b)中的情形，我們可以重複點餐，但是不考慮順序，即 1,1,3,2、1,3,2,1、...都代表 $x_1=2$ 、 $x_2=1$ 、 $x_3=1$ 、 $x_4=0$ 、 $x_5=0$ 、 $x_6=0$ 這一組解，稱為**重複組合**。

(1)重複組合的定義：

從 n 類物件中取出 m 件，(每類至少有 m 件)的組合數

=不定方程式 $x_1+x_2+\dots+x_n=m$ 的非負整數解個數

$$=(n-1)\text{個}\text{O}\text{與 } m \text{ 個}\text{O}\text{的排列數} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_m^{n+m-1}$$

($n+m-1$ 個不同位置，選 m 個位置排入 m 個 O。)

註：也可以定義 C_m^{n+m-1} 為 H_m^n ，即 $H_m^n = C_m^{n+m-1}$ 。

當我們從 n 類東西中取出 m 件，或問題的方法數可以化成不定方程組 $x_1+x_2+\dots+x_n=m$ 的非負整數解的個數，這都是使用重複組合的時機。

[例題17] 求下列各小題的方法數：

- (1)同時擲 2 粒相同的骰子，有幾種可能的情形？
- (2)有 4 名候選人，18 名選舉人，記名投票時，有幾種情形？不記名投票時，有幾種情形？(假設每個人都去投票，而且沒有廢票)
- (3)將 6 件相同的玩具分給 4 個小朋友，任意的分配，有幾種分法？

Ans：(1)21 (2) 4^{18} ， C_{18}^{21} (3) C_6^9

[例題18] 求下列各小題：

- (1) $x+y+z+u=100$ 之非負整數解個數？
- (2) $x+y+z+u=100$ 之正整數解個數？
- (3) $x+y+z+u=100$ ，且滿足 $x>-1, y>2, z>3, u\geq-2$ 的整數解個數？

Ans：(1) C_{100}^{103} (2) C_{96}^{99} (3) C_{95}^{98}

[例題19] $(x+y+z)^8$ 的展開式中
(1)請問有幾個不同類項？(2)請求出 $x^2y^4z^2$ 項的係數=？

$$\text{Ans : (1)} C_8^{10} \quad (2) \frac{8!}{2!4!2!}$$

[例題20] $x+y+z \leq 8$ 之非負整數解個數？ Ans : C_8^{11}

(練習41) 投擲 4 粒骰子

(1)骰子不同有幾種可能的情形？ (2)骰子相同有幾種可能的情形？

$$\text{Ans : (1)} 6^4 \quad (2) C_4^9$$

(練習42) 將 9 件相同的玩具分給 4 個小朋友，每個人至少一件，有幾種分法？

$$\text{Ans : } 56$$

(練習43) 設 $(a+b+c)^7$ 的展開式中，

(1)請問有幾個不同類項？(2)請問 a^2bc^4 的係數=？

$$\text{Ans : (1)} C_7^9 \quad (2) \frac{7!}{2!1!4!}$$

(練習44) 方程式 $x+y+z+u=12$ 的非負整數解有_____個，正整數解有_____個。

$$\text{Ans : } 455, 165$$

(練習45) 方程式 $x+y+z+u \leq 9$ 之正整數解之個數為何？ Ans : 126

(戌)排列組合的綜合運用

(1)分組與分堆問題：

例子：有 ABCDEF 六人按照下列人數來分組，請問有幾種分組的方法？

(1)按 3,2,1 分成三組 (2)按 2,2,2 分成三組。

[解法]：

(1)考慮 $C_3^6 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1$ 這個式子，根據乘法原理或樹狀圖，可以得知，按 3,2,1 分成三組的方法有 $C_3^6 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1$ 種。

(2)考慮 $C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2$ 這個式子，根據乘法原理或樹狀圖，我們可以發現 $\boxed{AB、CD、EF}$ ， $\boxed{AB、EF、CD}$ ， $\boxed{CD、AB、EF}$ ， $\boxed{CD、EF、AB}$ ， $\boxed{EF、AB、CD}$ ， $\boxed{EF、CD、AB}$ ，這 6 種分組方式並沒有差別，而算式 $C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2$ 中，卻將其算了 6 次，因此按 2,2,2 分成三組的分組方法只有 $C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2 \cdot \frac{1}{3!}$ 種。

[例題21] (分組與給物的問題)

有 8 本不同的書本，

(1)平分成兩堆 (2)按照 4,2,2 分成三堆 (3)按照 4,3,1 分成三堆

(4)平分給甲乙兩人 (5)甲給 4 本，乙給 2 本，丙給 2 本

(6)按照 4,3,1 自由分配給甲乙丙三人

Ans：(1)35 (2)210 (3)280 (4)70 (5)420(6)1680

[例題22] (有特定條件的分組問題)

(1)9 人平分成三組，其中甲乙丙三人必不在同一組的方法有幾種？

(2)9 人平分成三組，其中甲乙在同一組的方法有幾種？

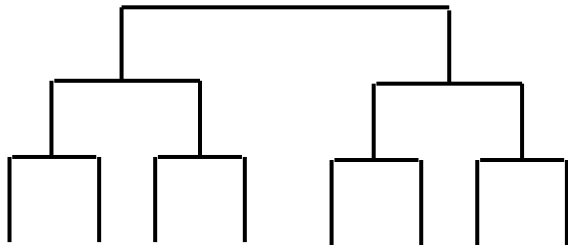
Ans：(1)90 (2)70

(練習46) 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸 9 人參加，組成 3 隊，且甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？ Ans：210 (90 學科)

(練習47) 有學生 10 人，住 A,B,C 三間房，若 A 房住 4 人，B,C 各住 3 人
(1)住法有幾種？ (2)若甲乙兩人住同房，其住法有幾種？
Ans：(1)4200 (2)1120

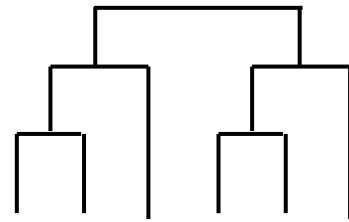
(練習48) 有八本不同的書，按 3,3,2 自由分配給甲乙丙三人，請問有幾種給法？
Ans：1680

(練習49) HBL 的複賽共有 8 支隊伍入圍參加比賽，現在要作淘汰賽，如圖為本次的賽程表，請問共有幾種安排賽程的方式？ Ans：315



(練習50) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
(1)將 S 的元素分成 4 個，5 個的兩組，1,2 要在同一組的選法有幾種？
(2)從 S 中任取 3 個數的和為奇數的取法有幾種？
Ans：(1)56 (2)40

(練習51) 高二三班各派 2 名羽球選手，作羽球的單打排名賽，比賽賽程表如圖所示，而且要求同班派出的選手在冠亞軍以外不比賽，則賽程有幾種排法？ Ans：36



(2)排列與組合的綜合運用：

[例題23] 7 個球放入 3 個箱子，每個箱子都夠大能放入 7 個球，亦可以留有空箱子

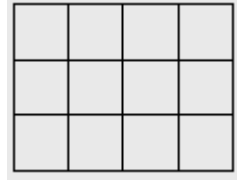
- (1)球相同，箱子相同有幾種存放的方法？
- (2)球相同，箱子相異有幾種存放的方法？
- (3)球相異，箱子相同有幾種存放的方法？
- (4)球相異，箱子相異有幾種存放的方法？

Ans：(1)8 (2)36 (3)365 (4)2187

[例題24] 下列哪一個選項的答案為 C_3^7 ?

- (1) 舞蹈社有 3 個男生 4 個女生，要選出 3 人代表獻花，則選法有幾種？
- (2) 甲、乙、丙 3 人從 7 件不同的禮物中，每人選 1 件，則選法有幾種？
- (3) 將「庭院深深深幾許」7 個字任意排列的方法數有幾種？
- (4) 如右圖的棋盤式街道，從 A 到 B 走捷徑(只能向右或向上)則走法有幾種？
- (5) 4 枝相同的筆，任意分給 4 個人，則分法有幾種？

Ans : (1)(4)(5)



[例題25] 設 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{5,6,7\}$

- (1)從 A 映至 B 的函數有幾個？
- (2)從 A 到 B 的映成函數有幾個？
- (3)從 B 映到 A 的函數有幾個？
- (4)從 B 到 A 之一對一函數有幾個？

Ans : (1)81 (2)36 (3)64 (4)24

[例題26] 請求出下列集合的元素個數：

$A=\{(x,y,z)|1\leq x,y,z\leq 9, x,y,z \text{ 為整數, 且 } x,y,z \text{ 互異}\}$,

$B=\{(x,y,z)|1\leq x,y,z\leq 9, x,y,z \text{ 為整數}\}$

$C=\{(x,y,z)|1\leq x<y<z\leq 9, x,y,z \text{ 為整數}\}$

$D=\{(x,y,z)|1\leq x\leq y\leq z\leq 9, x,y,z \text{ 為整數}\}$

Ans : $n(A)=504$, $n(B)=729$, $n(C)=84$, $n(D)=165$

[例題27] 由 **mathematical** 中的字母，每次取 4 個的組合數有幾個？排列數有幾個？
Ans : 143 , 2482

(練習52) 將 10 件相同物分給甲乙丙三人
(1)每人至少一件，有幾種分法？
(2)其中一人至少得一件，一人至少得二件，一人至少得三件，
有幾種分法？ Ans : (1)36 (2)33

(練習53) 五件不同的玩具分給甲乙丙三人，求下列的分法？
(1)每人至少得一件。 (2)甲得 2 件，乙得 2 件，丙得 1 件。
Ans : (1)150 (2)30

(練習54)(函數的個數) $f: G \rightarrow H$ 為一個函數
(1)若 $n(G)=6$, $n(H)=3$, 則 f 的個數有幾種？
(2)若 $n(G)=3$, $n(H)=7$, 且 f 為一對一函數，則 f 的個數有幾種？
(3)若 $n(G)=9$, $n(H)=2$, 且 f 為映成函數，則 f 的個數有幾種？
Ans : (1)729 (2)210 (3)510

(練習55) 自 ATTENTION 一字中，每次取 5 個字母，共有幾種取法？幾種不同的排列法？ Ans : 41 , 2250

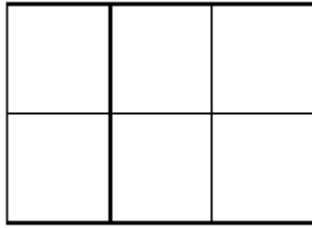
(練習56) 設 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, 則從 A 到 B 的函數中，滿足
(1) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 者共有幾個？(2) $f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$ 者共有幾個？
Ans : (1)126 (2)15

(練習57) 袋中有相同的紅球 5 個，相同的白球 4 個，相同的黑球 2 個，相同的黃球 2 個，綠球 1 個，自袋中任取 4 球
(1)有幾種取法？ (2)取 4 球排成一列有幾種取法？
(3)從袋中至少取一球有幾種取法？ Ans : (1)45 (2)478 (3)539

綜合練習(二)

- (15) 設 n 為正整數， $C_{n+3}^{29} = C_{2n-4}^{29}$ ，試求 n 之值。
- (16) (a) 若 $C_{30}^{56} = C_r^{56}$ ， $r \neq 30$ ，求 r 之值。
(b) 求 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{19}$ 之值。
- (17) 從五位男生六位女生中，選出五人組成委員會，試問：
(a) 共有多少種選法？
(b) 規定男女各至少有兩人，有多少種選法？
- (18) 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚共 7 人，從中選出 4 人，求下列選法各有幾種：
(a) 任意選。
(b) 甲、乙同時入選。
(c) 甲、乙不能同時入選。
(d) 甲、乙、丙三人至少有一人入選。
- (19) 某公寓住戶，欲從六對夫婦中，選出 5 人組成管理委員會，求下列選法各有幾種？
(a) 任意選。
(b) 5 人中恰有一對夫婦。
(c) 夫婦不得同時入選。
- (20) 若數列 $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{10}$ 中每一項皆為 1 或 -1，則 $a_1 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$ 之值有多少種可能？(1)10 (2)11 (3) P_2^{10} (4) C_2^{10} (5) 2^{10} (2010 學科)
- (21) 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生，導師規定在本週五個上課日中，每天兩名值日生，且至少需有 1 名男生，試問本週安排值日生的方式有_____種。(90 大學社)
- (22) 因乾旱水源不足自來水公司計畫在下周一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有幾種選擇方式？(2002 指定乙)
- (23) 新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：
- | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 款式 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 | 己 | 庚 | 辛 |
| 價格 | 670 | 670 | 700 | 700 | 700 | 800 | 800 | 800 |
- 規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格(例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一)。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有_____種。(2006 學科)
- (24) 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。
(1) 55 (2) 66 (3) 132 (4) 198 (5) 253。(2013 學科能力測驗)

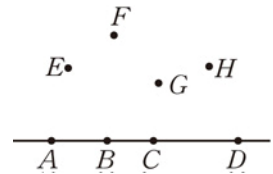
- (25) 有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6 (不得重複)，則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有_____種。



(2010 學科)

- (26) 一副撲克牌共 52 張，由其中取出 5 張，求：
- (a) 5 張為同一花色的情形共有_____種。
- (b) 5 張中有 3 張同點數，另外 2 張也同點數 (如 $xxxxy$, $x \neq y$) 的情形有_____種。

- (27) 平面上有 8 個點，若其中恰有 4 點共線，如右圖。
- (a) 這 8 個點可作出幾條相異直線？
- (b) 這 8 個點可決定幾個三角形？



- (28) 兩個凸多邊形，共有 16 個邊，41 條對角線，則此兩個多邊形的邊數分別為多少？

- (29) 將八位新轉來的學生分到甲、乙、丙、丁四班。
- (a) 每班 2 人，有幾種分法？
- (b) 甲班 2 人，乙班 2 人，丙班 1 人，丁班 3 人，有幾種分法？
- (c) 其中有兩班各 2 人，另外一班 1 人，一班 3 人，分法有幾種？

- (30) 有甲、乙、丙等 12 人平分為四隊，每隊三人，若甲、乙兩人不同隊，則有_____種分法。

- (31) 方程式 $x+y+z+u=10$ 的
- (a) 非負整數解有幾組？
- (b) 正整數解有幾組？
- (c) 非負偶數解有幾組？
- (d) 正奇數解有幾組？

- (32) 某一跳棋盒內，有紅、黃、藍三種顏色的棋子，每種顏色各有 15 顆，若隨意從盒中抓出 10 個，則有幾種情形？

- (33) 有四種大小相同的色球各 6 個，從中任取 5 個，
- (a) 任意取，方法有幾種？
- (b) 恰含兩種色球，方法有幾種？

- (34) 某水果店販售的水果有蘋果、梨子、芒果、橘子。某人欲購買 12 顆裝的水果禮盒一盒，但要求每種水果至少裝一顆，請問老闆有多少種裝法？

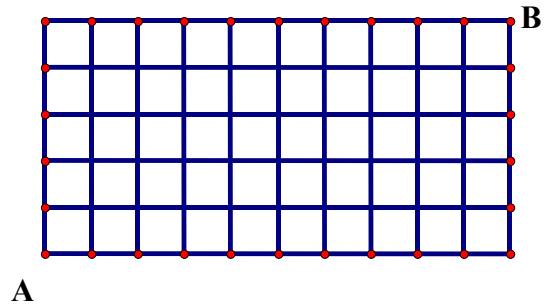
- (35) 將 3 個蘋果、4 個梨子分給甲、乙、丙三人。
- (a) 分法有幾種？
- (b) 每種水果每人至少須得一個，分法有幾種？
- (c) 每人至少得一個水果，分法有幾種？

- (36) 將 3 本書全分給 5 人，依下列情形，方法各有幾種：
- (a) 書不同，每人所得不限，有_____種。
- (b) 書相同，每人至多一本，有_____種。

- (37) 6 件不同的禮物，要分給甲、乙、丙等三個人，每人至少得 1 件，有_____種方法。
- (38) 自 *attention* 中，每次取出四個字母，則：
 (a) 組合數為_____個。 (b) 排列數為_____個。
- (39) 設 $\boxed{a} \boxed{b} \boxed{c}$ 為三位數，滿足下列條件的三位數各有幾個：
 (a) $a > b > c$ 。 (b) $a < b < c$ 。 (c) $a \geq b \geq c$ 。 (d) $a \leq b \leq c$ 。

進階問題

- (40) 將 5 個“+”號，6 個“-”號排成一列，若變號數（“+”號後面接“-”號或“-”號後面接“+”號，各稱為一個變號數）為 4，則其排法有_____種。
- (41) 將 5 個 A 和 3 個 B 任意排列，我們將連續相同的字母畫一底線定義為一個「連串」，例如 ABBABAAA 畫記為 A BB A B AAA，其連串數為 5。
 又如 BB AAAAA B 其連串數為 3，試問 5 個 A 和 3 個 B 任意排列後，連串數為 3 的排法共有多少種？
- (42) 有 8 個人身高均相異，今 8 人排成一列，但任一人都不排在比自己高的兩人之間，共有_____種排法。
- (43) 連接正 12 邊形之任 3 個頂點，可得
 (a) 多少個直角三角形？
 (b) 多少個銳角三角形？
 (c) 多少個鈍角三角形？
- (44) 以 245000 為最小公倍數的兩個正整數 A 與 B，請問數對(A,B)有幾組？
- (45) 平面上有 11 個相異點，任意連接兩點，共可得 48 條不同的直線
 (a) 在這 11 點中，含 3 點以上的相異直線有幾條？
 (b) 在這 11 點中，任取 3 點，可決定幾個三角形？(2004 台大電機甄試)
- (46) A、B 兩人競選，選舉得票數共 11 張，唱票時，A 一直保持領先，且最後 A 恰以多一票獲勝，則唱票的情形有多少種？
- (47) 如右圖，棋盤式街道中由 A 到 B 走捷徑，恰轉彎 4 次的走法有幾種？



綜合練習解答

- (15) $n=7$ 或 10 。
- (16) (a)26 (b)1140
- (17) (a)462 (b)350
- (18) (a)35 (b)10 (c)25 (d)34
- (19) (a)792 (b)480 (c)192
- (20) (2)
- (21) 43200
- (22) 15
- (23) 21
- (24) (5)
- (25) 432
- (26) (a)5148 (b)3744
- (27) (a)23 (b)52
- (28) 9 與 7
- (29) (a)2520 (b)1680 (c)20160

[提示：(a) 共有 $C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 2520$ (種) 分法。(b) 共有

$C_2^8 C_2^6 C_1^4 C_3^3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 1680$ (種) 分法。(c) $(C_2^8 C_2^6 C_1^4 C_3^3 \times \frac{1}{2!}) \times 4! = 20160$]

- (30) 12600
- (31) (a) $C_{10}^{13} = 286$ (b) $C_6^9 = 84$ (c) $C_5^{4+5-1} = C_5^8 = 56$ (d) $C_3^6 = 20$
- (32) 66
- (33) (a)56 (b)24
- (34) 165
- (35) (a) $C_3^{3+3-1} C_4^{3+4-1} = C_3^5 C_4^6 = 150$ (b) $C_0^{3+0-1} C_3^{3+1-1} = C_0^2 C_1^3 = 3$
- (c)93 [每人至少得 1 個水果，分法有 (全部分法) - (其中一人沒得) + (其中二人沒得) - (三人沒得)]
- (36) (a)125 (b)10
- (37) 540

(38) (a)41 (b)626

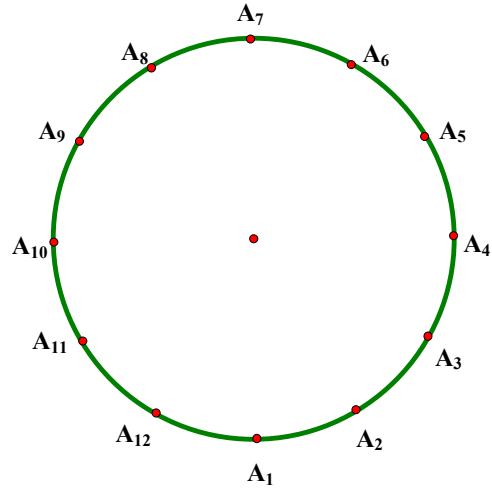
(39) (a)120 (b)84 (c)219 (d)165

(40) 70

(41) 6

(42) 128

(43) (a)60 (b)40 (c)120 [提示：(a)任選一條直徑 A_1A_7 ，可得 10 個直角三角形，所以有 $6 \times 10 = 60$ 個直角三角形。(b)取 A_1 為頂點，以 A_1A_2 為邊，形成 0 個銳角三角形，以 A_1A_3 為邊，形成 1 個銳角三角形($\Delta A_1A_3A_8$)，以 A_1A_4 為邊，形成 2 個銳角三角形($\Delta A_1A_4A_8$ 、 $\Delta A_1A_4A_9$)，以 A_1A_5 為邊，形成 3 個銳角三角形，以 A_1A_6 為邊，形成 4 個銳角三角形($\Delta A_1A_3A_8$)，所以取 A_1 為頂點，可形成 $(1+2+3+4) = 10$ 個銳角三角形，共有 $10 \times 12 \times \frac{1}{3} = 40$ 個銳角三角形。



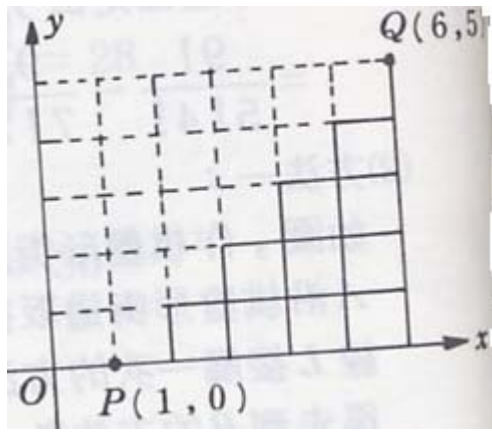
(c) $C_3^{12} - 60 - 40 = 120$ 。]

(44) 315

[提示： $245000 = 2^3 \times 5^4 \times 7^2$ ，設 $A = 2^a \times 5^b \times 7^c$ ， $B = 2^\alpha \times 5^\beta \times 7^\gamma$ ，討論 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 有幾種情形，就可以得知(A,B)的數對有幾組，因為 (a, α) 有 $2 \times 4 - 1 = 7$ 種情形($(3,0)$ 、 $(3,1)$ 、 $(3,2)$ 、 $(0,3)$ 、 $(1,3)$ 、 $(2,3)$ 、 $(3,3)$)，同理 (b, β) 有 $2 \times 5 - 1 = 9$ 種情形， (c, γ) 有 $2 \times 3 - 1 = 5$ 種，因此數對(A,B)有 $7 \times 9 \times 5 = 315$ 組]

(45) (a)2 (b)160 [提示：(a)若 11 個相異點中，任三點不共線，則可決定 $C_2^{11} = 55$ 條直線，因為只決定了 48 條直線，則可知少了 7 條直線，另外，若有一直線上有三點，則直線會減少 $C_2^3 - 1 = 2$ 條，若有一直線上有四點，則直線會減少 $C_2^4 - 1 = 5$ 條，若有一直線上有五點，則直線會減少 $C_2^5 - 1 = 9$ 條，此不可能，所以在這 11 點中有一條直線恰有 3 點，令一直線恰有 4 點。(b) $C_3^{11} - C_3^3 - C_3^4 = 160$]

(46) 42 [提示：將 A 的得票數與 B 的得票數分別記在 x 軸， y 軸，唱票時 A 一直保持領先，故第一票為 A 所得，即自 $P(1,0)$ 出發，第二票必是 A 獲得，故由 $(1,0)$ 移動到 $(2,0)$ ，令 A、B 的得票數分別為 a, b ，則形成點 (a,b) ，其中 $a > b$ 。最後 A 恰以一票獲勝，因此終點為 $Q(6,5)$ ，即自 P 點開始沿實線取捷徑走到 Q 點的方法，會與唱票時，A 一直保持領先，且最後 A 恰以多一票獲勝的唱票情形一一對應。]



- (47) 198 [提示：從 A 到 B 走捷徑，相當於 10 個 \rightarrow 5 個 \uparrow ，而轉彎 4 次代表 $\rightarrow\uparrow$ 有 4 個，因此可分成 $\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$ 或 $\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$ 兩種，
 (1) $\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$ ：剩下 7 個 \rightarrow 要排在 \rightarrow 的位置，而 3 個 \uparrow 要排在 \uparrow 的位置，因此有 $H^3_7 \times H^2_3$ 種；同理 $\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$ 有 $H^3_2 \times H^2_8$ 種]