§3−3 對數

(甲)對數概念的引入與定義

◆ 對數的引入

(1)對數發展的歷史：

請參考「毛起來說 *e*」：天下文化 Ch1~Ch3 的內容。

(2) 對數的引入：

西元 1554 年，Michael Stifel 在<<整數算術>>一書中寫出兩個數列：

a	…	−2	−1	0	1	2	3	4	5	…	x	…	y	…	$x+y$
2^a	…	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	…	M	…	N	…	M×N

現在想要計算 M×N，如果能得知 x,y 的值(或是近似值)，根據指數律可知：

$M=2^x$，$N=2^y \Rightarrow M\times N=2^x\cdot 2^y=2^{x+y} \Rightarrow$ 因此只要能得出上表就可得出 $x+y$ 所對的值 M×N

這樣想法經過數學化之後就形成了**對數**的概念。

給定底數 2，大家知道 2 的 3 次方等於 8。反過來說，如果已知 8，我們想知道 8 是 2 的幾次方，這等於求方程式 $2^x=8$ 的解，通常以符號 $\mathbf{\log_2 8}$ 表示之，即 $3=\log_2 8$。

$$2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$$
$$10^2=100 \Leftrightarrow \log_{10}100=2$$
$$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

◆ 對數的定義

(1)定義對數：

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，當 $a^x=b$ 時，用符號 $\log_a b$ 來表示 x，即 $\log_a b=x$，稱 $\mathbf{\log_a b}$ 為以 a 為**底數**時 b 的對數，b 稱為**真數**。

反過來說，若 $\log_a b=x$，則 $a^x=b$，即 $a^{\log_a b}=b$。

✧ 關於 $\log_a b$ 這個符號：

正如我們對於$\sqrt{2}$的了解，它是一個無理數，我們可以對它作如下的描述：

「$\sqrt{2}$代表一個正數，而這個正數的平方等於 2」。而 $\log_a b$ 我們也可以作如下的描述：

「**$\log_a b$ 代表一個數 r，而 a 的 r 次方等於 b，用符號來表示** $a^{\log_a b}=b$ 」。

[問題與討論]：

當 $a^x=a^y$ 時，$x=y$ 會成立嗎？

為何 a 要大於 0，不等於 1 呢？

我們在討論指數 a^x 時，a 必須大於 0，所以規定對數時，我們也假設 $a>0$，，因為 $a>0$，$a^x>0$ 所以只有正數的對數才有意義。因此 b 必須大於 0，當 $a=1$ 時，因為 $1^2=1$，$1^3=1$，那麼 $\log_1 1$ 到底要代表 2 或是 3 呢？這就無法定義清楚了，所以我們不以 1 為底數，

結論：

(1) $\log_a b$ **有意義** $\Leftrightarrow$ $a>0$ **且** $a\neq 1$，$b>0$。

(2) $\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \Leftrightarrow a^{\log_a b}=b$。

[例題1] 將下列的 x 值用對數表示：

(1)$4^x=\dfrac{1}{64}$ (2)$5^x=100$ (3)$8^x=17$ Ans：(1)$\log_4\dfrac{1}{64}$ (2)$\log_5 100$ (3)$\log_8 17$

[例題2] 求下列各式的值：

(1)$\log_3 1$ (2)$\log_{0.5}\dfrac{1}{2}$ (3)$\log_2\sqrt{8}$ (4)$\log_{10}1000^{\frac{1}{10}}$ (5)$\log_4 8$ (6) $2^{\log_2 5}$

Ans：(1)0(2)1(3)$\dfrac{3}{2}$(4)$\dfrac{3}{10}$ (5)$\dfrac{3}{2}$ (6)5

[例題3] 求下列各式的 x。

(1)$\log_{25}x=-2.5$。 (2)$\log_x 9\sqrt{3}=5$ (3)$\log_x 81=\dfrac{4}{3}$

Ans：(1)$\dfrac{1}{3125}$ (2)$\sqrt{3}$ (3)27

(練習1) 將下列等式中的 x 值用對數表示：

(1)$3^x=8$ (2)$(2.51)^x=7$ (3)$5^x=17$。

Ans：(1)$\log_3 8$ (2)$\log_{2.51}7$ (3)$\log_5 17$

(練習2) 求下列各式的值：

(1) $3^{\log_3 7}$ (2) $5^{\log_5 9}$ (3) $a^{\log_a b}$

Ans：(1)7 (2)9 (3)b

(練習3) 試求下列各對數值：(1)$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ (2)$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$ (3)$\log_{\frac{3}{4}}1$ (4)$\log_2\sqrt[3]{2}$

Ans：(1)2(2)$\frac{1}{2}$(3)0(4)$\frac{1}{3}$

(練習4) 設 $\log_{10}2=p$，$\log_{10}3=q$，則 $10^{3p+2q+1}=$？ Ans：720

(練習5) 試求下列的 x 值：

(1)$\log_x 27=6$ (2)$\log_7 x=\frac{3}{2}$ (3)$\log_x 8\sqrt{2}=7$

Ans：(1)$\sqrt{3}$ (2)$7\sqrt{7}$ (3)$\sqrt{2}$

(練習6) 設 $\log_a b=r$，a 是不等於 1 的正數，則下列何者為真？

(A) $b>0$ (B) $r>0$ (C) $b>1$ (D) $r>1$ (E) $b=a^r$。

Ans：(A)(E)

(乙)對數的運算性質

◆ 對數的基本性質

設 $a>0$，且 $a\neq1$，b,r,s 均為正數

(1)**設 $a>0$，且 $a\neq1$，$b>0$，$a^{\log_a b}=b$**

說明：$\log_a b$ 代表一個數，a 的這個數次方就等於 b，換句話說，a 的 $\log_a b$ 次方等於 b。

寫成式子：$x=\log_a b \Leftrightarrow b=a^x=a^{\log_a b}$

(2) **$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$**

證明：因為 $a^0=1$，$a^1=a$。

(3) **$\log_a r+\log_a s=\log_a rs$, $\log_a r-\log_a s=\log_a\frac{r}{s}$**

同底的對數相加等於真數相乘，同底的對數相減等於真數相除

證明：因為 $a^{\log_a r}=r,\ a^{\log_a s}=s$，

所以 $rs=a^{\log_a r}\cdot a^{\log_a s}=a^{\log_a r+\log_a s} \Rightarrow \log_a rs=\log_a r+\log_a s$

$\frac{r}{s}=a^{\log_a r}\div a^{\log_a s}=a^{\log_a r-\log_a s} \Rightarrow \log_a\frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$

(4) $\boxed{\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b \text{ ，}\boldsymbol{m,n}\text{ 為實數，且 }\boldsymbol{m\neq 0}}$

(a)$\log_a r^t = t\cdot\log_a r$ (t 為實數)

證明：$r=a^{\log_a r} \Rightarrow r^t=(a^{\log_a r})^t=a^{t\cdot\log_a r} \Rightarrow \log_a r^t=t\cdot\log_a r$

(b) $\log_{a^t} r = \dfrac{1}{t}\log_a r$ **(t 為實數)**

證明：$r=a^{\log_a r} \Rightarrow r=(a^t)^{\frac{1}{t}\log_a r} \Rightarrow \log_{a^t} r = \dfrac{1}{t}\log_a r$

從(a) (b)可以得到$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$。

◆ 換底公式

(5) $\boxed{\boldsymbol{\log_a b}=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\text{ ，其中 }\boldsymbol{c>0}\text{，}\boldsymbol{c\neq 1}\quad\textbf{(換底公式)}}$

(a)換底公式的用意：

只要 a 是異於 1 的正實數，a 都可以當對數的底數，所以對數的底數有無限多個。當我們求對數值需要去查對數表時，是不是需要製作不同底數的對數表呢？接下來我們介紹換底公式，利用換底公式可以使對數值處理更容易。

對數的底數中，以 10 為底數較常使用。

我們想問 $\log_2 3$ 如何用 $\log_{10}3$ 與 $\log_{10}2$ 來表示？

先觀察一個例子：$\log_2 3=\log_{5^{\log_5 2}} 5^{\log_5 3}=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\log_5 5=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$ 。

(b)證明換底公式：

證明：$\log_a b=\log_{c^{\log_c a}} c^{\log_c b}=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\log_c c=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ 。

計算要訣：

(1)同底對數相加(減)，真數相乘(除)

(2)對數相乘考慮換底公式。

[例題4] 計算下列各式：

(1) $\log_{\sqrt{2}} 8$ (2) $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 7}$ (3) $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{2}$

(4) $\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$ (5) $\log_4\frac{28}{15}-2\log_4\frac{3}{14}+3\log_4\frac{6}{7}-\log_4\frac{2}{5}$

Ans：(1) 6 (2)7(3) $\frac{52}{15}$ (4)2 (5)3

[例題5] 請利用換底公式證明：

(1) $\boldsymbol{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}}$ **(b>0，b≠1)**

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$ **(連鎖律)**

[例題6] 試求下列各值：

(1) $\frac{\log_4 27}{\log_2 3}$

(2) $\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$

(3) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25} 0.5)$ Ans：(1) $\frac{3}{2}$(2) 12 (3)$\frac{1}{4}$

[例題7] 設 $\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$，試以 a,b 表 $\log_{66}44$。Ans：$\dfrac{2+ab}{1+a+ab}$

(練習7) 試求下列各值：

(1) $2^{-\log_2 3}$ (2) $2^{\frac{\log 3}{2\log 2}}$ (3) $\log_{144}\sqrt[3]{2}+\log_{144}\sqrt[6]{3}$

(4) $\log_2(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})$ (5) $\dfrac{\log_4 27}{\log_2 3}$ (6) $\dfrac{\log_5 16}{\log_{25} 8}$

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\sqrt{3}$ (3)$\frac{1}{12}$ (4)$\frac{1}{2}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6)$\frac{8}{3}$

(練習8) 化簡下列各式：

(1)$\log_{10}\dfrac{50}{9}-\log_{10}\dfrac{3}{70}+\log_{10}\dfrac{27}{35}$ (2)$\log_{10}\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{3}\log_{10}\sqrt{8}+\dfrac{2}{3}\log_{10}\sqrt{343}$

(3)$\log_3 54+\log_3 6-2\log_3 2$ Ans：(1)2(2)0(3)4

(練習9) $5^{\frac{\log_2 6}{\log_2 5}}+4^{\frac{1}{\log_5 4}}=$？。Ans：11

(練習10) 設 $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$，試將下列各數值以 a,b 表示：

(1)$\log_6 24$ (2)$\log_2\sqrt{3}+\log_3\sqrt[3]{2}$ (3)$\log_5\sqrt{6}$ (4)$\log_{0.75}100$

Ans：(1)$\dfrac{3a+b}{a+b}$ (2)$\dfrac{b}{2a}+\dfrac{a}{3b}$ (3)$\dfrac{a+b}{2(1-a)}$ (4)$\dfrac{2}{b-2a}$

(練習11) 設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，以 a，b 表出(1) $\log_2 12=$__________。(2) $\log_{66}18$ $=$__________。Ans：(1) $2+a$(2)$\dfrac{1+2a}{1+a+ab}$

[例題8] 求下列方程式之解：

(1)$2^{2x}-7\times2^x+12=0$ (2)$2^{3x}-10\times2^{2x}+31\times2^x-30=0$

Ans：(1)$x=2$ 或 $\log_2 3$ (2)$x=1$ 或 $\log_2 3$ 或 $\log_2 5$

[例題9] 解下列方程式：

(1)$\log_6 x+\log_6(x^2-7)=1$ (2)$\log_{\frac{1}{4}} x+(2\log_{16} x^2)-\frac{3}{2}=0$

(3)$\log_{10}x-6\cdot\log_x 10=1$ (4) $\log_{10}(10^x+100)=\frac{x}{2}+1+\log_{10}2$

Ans：(1)$x=3$ (2)$x=8$ (3)$x=10^3$ 或$\frac{1}{100}$ (4) $x=2$

(**練習**12) 試解下列方程式：

(1)$1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$ (2)$\log_3(3^x+6)=\frac{x}{2}+\log_3 5$

(3)$\log_5 x+\log_5(x^2-6)=1$ (4) $x^{\log x}=10^8 x^2$

Ans：(1)$x=17$ (2)2 或 $2\log_3 2$ (3)$x=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ (4)$x=10^4$ 或 10^{-2}

[提示：等號兩邊取對數 $\log(x^{\log x})=\log(10^8x^2)$]

綜合練習

(1) 求下列各式中的 x 值：

(1) $\log_x 3=2$ (2) $\log_3 x=-2$　(3) $25^x=10000$　(4) $5^{\log_6 x}\cdot 5^{\log_6 72}=125$

(5) $\dfrac{6^{\log_5 x}}{6^{3\log_5 15}}=\dfrac{1}{36}$　(6) $2^{\log_5 x}=3^{\log_5 8}$　(7) $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{8}$　(8) $8^{\log_x 11}=121$

(2) 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ 。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a^3=3$ (2) $\log_{\sqrt{3}} a=\sqrt{3}$ (3) $a>1$ (4) $a<3^{\frac{1}{4}}$ 。 (2010 指定甲)

(3) 請問下列哪一個選項是正確的？
(1) $3^7<7^3$ (2) $5^{10}<10^5$ (3) $2^{100}<10^{30}$ (4) $\log_2 3=1.5$ (5) $\log_2 11<3.5$。
(2011 學科能力測驗)

(4) 設 $f(\log x)=x$，$x>0$ 則 $f(5)=$(A)$\log 5$ (B)$\log_5 10$ (C)5^{10} (D)10^5 (E)$10\log 5$ 。

(5) 下列哪些式子是正確的？
(A)$\log_7(-3)^2=2\log_7(-3)$　(B)$\log_7 7=1$　(C)$\log_{81} 3=4$　(D)$\log_6(3+4)=\log_6 3+\log_6 4$
(E)$\log_{\sqrt{6}}\sqrt{7}=\log_6 7$

(6) 試化簡下列各式：

(a) $\log_{2\sqrt{2}} 16\sqrt[3]{4}$　(b) $2^{2\log_2 3}$　(c) $\dfrac{\log_5 16}{\log_{25} 8}$　(d) $\log_2(\log_2 49)+\log_2(\log_7 2)$　(e) $3^{\frac{\log 4}{2\log 3}}$

(7) 試求下列各值：
(a) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$
(b) $\log_3\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}$
(c) $(\log_5 2+\log_{25} 8)(\log_4 3+\log_{\sqrt{2}} 27)(\log_3 0.2+\log_9 5)$
(d) $(\log_2 9)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_{\frac{1}{4}} 8)$

(8) 試求下列兩小題：

(a)設 $10^{-\log_2 x}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$ ，求 x 之值。(b)設 $2x=\log_2 3$，則 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=$？

(9) 試求下列二小題：
(a)若 $a=\log 2$，$b=\log 3$ ，則 $\log 7.5=$？　($\log x=\log_{10} x$)
(b)設 $10^a=(1+\dfrac{1}{2}),10^b=(1+\dfrac{1}{4})$ ，則 $\log_3 2=$_____。（以 a, b 表示）

(10) 若 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，試以 a,b 表示 $\log_{42}\dfrac{56}{9}=$？

(11) 方程式 $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{4}$的解是(A)$x=\dfrac{1}{9}$ (B)$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C)$x=\sqrt{3}$ (D)$x=9$。

(12) $2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\dfrac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})=$

(A)2×10^{x} (B)$x\cdot\log_{10}\dfrac{1}{4}$ (C)1 (D)$2\cdot\log_{10}2$ (E)$2x+10^{2x}$。

(13) 設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$______。(2007 學科)
(化成最簡分數)

(14) 若 $2^{x-1}+2^{x}=5^{x-1}+5^{x}$，則(a)$\dfrac{5^x}{2^x}=$？ (b)用 log2 表示 x。

(15) 方程式 $\log x+\log(x-3)=1$ 與下列那一個方程式的「解」完全相同。
(A)$\log x(x-3)=1$ (B)$x(x-3)=10$ (C)$10^{x(x-3)}=10^{10}$ (D)$10^{x}\cdot10^{x-3}=10^{10}$
(E)$x>3$，且 $x(x-3)=10$。

(16) 解下列各方程式：
(a)$\log(2x-3)+\log(4x-1)=2\log5$ (b)$2\log(3x-1)+\log(x+1)=0$
(c)$1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$ (d)$4^{x}-2^{x+3}+15=0$

(17) 解下列方程式：
(a)$\log_x(x+3)-\dfrac{1}{2}\log_x(x+6)=\log_x 2(b)x^{\log x}=10^{6}x(c)\log_8(8^{x}+128)=\dfrac{x}{2}+1+\log_8 3$

(18) 設α、β為方程式$(\log x)^2-\log x^2-6=0$ 之二相異實根，則 $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=$？

(19) 等比數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中，已知 $a_3a_{13}=256$，
試求 $\log_2 a_1+\log_2 a_2+\ldots\log_2 a_{15}$ 之值。

(20) 已知函數 $f(x)=\dfrac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x}-3^{-x}}$，當 $x=m$ 時，$f(m)=\dfrac{13}{12}$，試求 m 的值。

進階問題

(21) 在方程式 $\log_2 x+a\cdot\log_x 2+b=0$ 中，甲生誤寫 b，得二根為$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，乙生誤寫 a，得二根為$\dfrac{1}{2}$，64，則 $a=$？$b=$？又正確解為何？

(22) 對數的除法運算，一般情形下 $\dfrac{\log a}{\log b}$ 當然不能化約為 $\dfrac{a}{b}$，然而對於某些數據，有時 $\dfrac{\log a}{\log b}=\dfrac{a}{b}$ 可能成立，例如：$\dfrac{\log 2}{\log 4}=\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{\log\sqrt{3}}{\log 3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$，…試再找出一些滿足此一等式的數對$(a,b)$，其中 $a<b$；或寫出一般式。

(23) α、β為方程式 $x^2+2x\log5+\log2.5=0$ 之二根，求 $10^{\alpha}+10^{\beta}=$？

(24) 設 a,b,c,d 為異於 0 的實數，且 $2^a=3^{-b}=5^c=\sqrt{90^d}$，請證明：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=2(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d})$。

(25) 已知 $2\log_3(a+3b)=\log_3(a-3)+\log_3(b+2)+\log_3 10$，若 a,b 為互質的正整數，試求 a,b 的值。

(26) (a)設 a,b 均為正數，證明：$a^{\log b}=b^{\log a}$。
(b)求解 $2^{\log x}\cdot x^{\log 2}-3\cdot x^{\log 2}-2^{1+\log x}+4=0$。

綜合練習解答

(1) (1)$\sqrt{3}$ (2)$\frac{1}{9}$ (3) $2\log_5 10$ (4)3 (5)135 (6)27 (7)$\frac{1}{27}$ (8)$2\sqrt{2}$

(2) (3)

(3) (5)

(4) (D)

(5) (B)(E)

(6) (a)$\frac{28}{9}$ (b)9 (c)$\frac{8}{3}$ (d)1 (e)2

(7) (a)5 (b)-1 (c)$-\frac{65}{8}$ (d)-6

(8) (a)$x=2\sqrt{2}$ (b)$\frac{13}{6}$

(9) (a)$1-2a+b$ (b) $\frac{1-b}{3a-b+1}$

(10) $\frac{ab-2a+3}{ab+a+1}$

(11) (A)

(12) (D)

(13) $\frac{1}{4}$

(14) (a)$\frac{5}{4}$ (b)$\frac{1-3\log 2}{1-2\log 2}$

(15) (E)

(16) (a)$x=\frac{11}{4}$ (b)$x=\frac{-1+\sqrt{21}}{6}$ (c)$x=17$ (d)$x=\log_2 3$ 或 $\log_2 5$

(17) (a)$x=3$ (b)$x=\frac{1}{100}$或 1000 (c)$x=2$ 或$\frac{8}{3}$

(18) 令 $t=\log x$，原方程式可化為 $t^2-2t-6=0$，因為α、β為原方程式的二相異實根，所以 $\log\alpha$、$\log\beta$為 $t^2-2t-6=0$ 的兩根，所以 $\log\alpha+\log\beta=2$，$(\log\alpha)(\log\beta)=-6$

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\dfrac{\log\beta}{\log\alpha}+\dfrac{\log\alpha}{\log\beta}=\dfrac{-8}{3}$。

(19) 60

(20) $\log_3 5$

(21) $a=6,b=-5$，$x=4,8$ [提示：可令 $A=\log_2 x$]

(22) $(a,b)=((1+\frac{1}{t})^t,(1+\frac{1}{t})^{1+t})$，$t>0$

(23) $\dfrac{1}{2}$

(24) 提示：可令 $t=2^a=3^{-b}=5^c=\sqrt{90^d}$ $\Rightarrow a=\log_2 t$，$b=-\log_3 t$，$c=\log_5 t$，$\dfrac{d}{2}=\log_{90} t$，$\Rightarrow\dfrac{1}{a}=\log_t 2$，

$\dfrac{1}{b}=-\log_t 3$，$\dfrac{1}{c}=\log_t 5$，$\dfrac{2}{d}=\log_t 90$，再代入驗證即可

(25) $a=11,b=3$

(26) (a) 證明 $\log(a^{\log b})=\log(b^{\log a})$

(b)可令 $A=2^{\log x}=x^{\log 2}$，原方程式可化為 $A^2-5A+4=0$，解得 $A=1$ 或 4，再解 $x=1$ 或 100