空間中直線方程式

例題 1

設直線 L 的兩面式為 $\begin{cases} x+2y+3z=18\cdots E_1 \\ 2x+3y+5z=30\cdots E_2 \end{cases}$，試求下列各小題：

(1) 將 L 化為參數式。

(2) $(x,y,z)\in L$，x，y，z 均為正整數者有______個。

(3) 將 L 化為對稱比例式。

(4) 求過點 $P(1,-3,7)$ 而與 L 平行之直線方程式。

(5) 求通過此交線且 x 截距為 -2 的平面方程式。

(6) 求與此交線垂直且 x， y 截距和為 -2 的平面方程式。

解 (1) L 的方向向量 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)$，

找點：令 $z=0$ 代入 L 得：$\begin{cases} x+2y=18 \\ 2x+3y=30 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=6, \\ y=6, \end{cases}$

$\therefore$ 定 $(6,6,0)$ 在直線上。

$\therefore L$ 參數式為 $\begin{cases} x=6+t, \\ y=6+t, \\ z=0-t \end{cases} t\in R$。

(2) $(x,y,z)\in L$；x，y，z 均為正整數者

$\Rightarrow x=6+t>0$，$y=6+t>0$，$z=0-t>0\Rightarrow -6<t<0$

$\Rightarrow t=-1,-2,-3,-4,-5$ 正整數解共有 5 個。

(3) $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-0}{-1}$。

(4) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-7}{-1}$。

(5) $\because$ E 過 L $\therefore$ 令 $E: E_1+kE_2=0$，

$\Rightarrow (x+2y+3z-18)+k(2x+3y+5z-30)=0$，

E 過 $(-2,0,0)$ 代入

$\Rightarrow (-20)+k(-34)=0\Rightarrow k=\dfrac{-10}{17}\Rightarrow E: 3x-4y-z+6=0$。

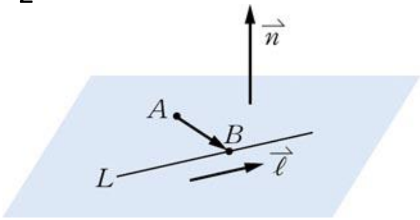
(6) $\overrightarrow{n}=(1,1,-1)$，

令 $E: x+y-z=k\Rightarrow$ 與 x， y 軸交點 $(k,0,0)$，$(0,k,0)$

由 x，y 截距和 $-2=k+k\Rightarrow k=-1$ $\therefore$ $E: x+y-z+1=0$。

例題 2

求過點 $A(4,3,1)$ 且包含直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$之平面方程式。



解 取直線 L 上一點 $B(1,2,1)$，

設所求平面法向量為$\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}=(-3,-1,0)$，

$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\ell}=(2,1,2)$，

$\Rightarrow\ \overrightarrow{n}\ //\ ((-3,-1,0)\times(2,1,2)=\ )(\ -2,6,-1)$

取$\overrightarrow{n}=(2,-6,1)$

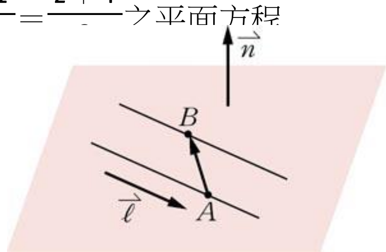
平面方程式為 $2(x-4)-6(y-3)+1(z-1)=0$

$\Rightarrow 2x-6y+z+9=0$。

例題 3

試求過二平行線 L_1：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{2}$，$L_2$：$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+4}{\text{[illegible]}}$之平面方程

式。



解 設所求平面的法向量為$\overrightarrow{n}$，又在 L_1，L_2 上

各取 $A(-1,1,-3)$，$B(-3,-1,-4)$。

$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\ell}=(1,2,2)$

且$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}=(-2,-2,-1)$，

$\Rightarrow\ \overrightarrow{n}\ //\ ((1,2,2)\times(-2,-2,-1)=\ )(2,-3,2)$，

取$\overrightarrow{n}=(2,-3,2)$，

平面方程式為 $2(x+1)-3(y-1)+2(z+3)=0$

$\Rightarrow 2x-3y+2z+11=0$。

例題 4

設 L_1：$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$，$L_2$：$\frac{x+2}{2}=\frac{y+14}{3}=\frac{z-1}{1}$相交於一點，試求：

(1) L_1 與 L_2 的交點 A 的坐標。

(2) 兩線夾角θ，$\cos\theta$ 的值。

(3) 包含 L，L_2 直線的平面方程式。

解 (1) 交點 $A\in L$：$\begin{cases}x=2+4t,\\ y=-1-t,\\ z=3+2t\end{cases}$ $t\in R$，$A\in L_2$：$\begin{cases}x=-2+2s,\\ y=-14+3s,\\ z=1+s\end{cases}$ $s\in R$

$\begin{cases}x=2+4t=-2+2s,\\ y=-1-t=-14+3s,\\ z=3+2t=1+s,\end{cases}$ 由前兩式得 $\begin{cases}t=1,\\ s=4\end{cases}$ 代入第三式檢驗成立

$\therefore\ L$， L_2交於一點 $(6,-2,5)$。

(2) $\overrightarrow{v_1}=(4,-1,2)$，$\overrightarrow{v_2}=(2,3,1)$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}=\dfrac{(8-3+2)}{\sqrt{21}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$或$\dfrac{-1}{\sqrt{6}}$。

(3) 平面 E 的法向量$\overrightarrow{n}$ // $(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\ )(-7,0,14)$，故可令 E_1：$x-2z=k$，

代入 $P(2,-1,3)$ 或 $P_2(-2,-14,1)\Rightarrow 2-6=-4=k$，

$\therefore$ E_1：$x-2z=-4$。

例題 5

已知 $A(1,1,1)$，$B(2,1,-1)$，平面 E：$x-2y+z+3=0$，P 在平面 E 上移動，試求：

使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小之 P 之坐標，並求此最小值。

解 ① $1-2+1+3>0$，$2-2-1+3>0$ $\therefore$ A，B 在平面 E 之同側。

② 設 A 在 E 上之為正射影為 H，故 H 為過 A 且垂直 E 的$\overleftrightarrow{AA'}$直線上一點，由於 $A(1,1,1)$，$\overrightarrow{n}=(1,-2,1)$，

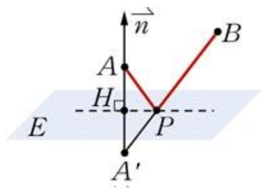
故以$\overleftrightarrow{AA'}$參數式，假設 H 為 $(1+t,1-2t,1+t)$，代入 E 得

$(1+t)-2(1-2t)+(1+t)+3=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow H(\dfrac{1}{2},2,\dfrac{1}{2})$，

由中點公式得對稱點為 $A'(0,3,0)$

③ $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$，

當 P 為$\overleftrightarrow{A'B}$與 E 之交點時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值$\overline{A'B}$，



由於 $A'(0,3,0)$，$\overrightarrow{A'B}=(2,-2,-1)$，

故以$\overleftrightarrow{A'B}$直線參數式，設 P 為 $(2t,3-2t,-t)$，

代入 E 得 $2t-2(3-2t)+(-t)+3=0\Rightarrow t=\dfrac{3}{5}$

$\therefore$ $P(\dfrac{6}{5},\dfrac{9}{5},-\dfrac{3}{5})$ 時，

$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值 $\overline{A'B}=\sqrt{2^2+(-2)^2+1}=3$。

例題 6

平面族的概念：

設 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，二平面交於一直線 L，則通過此直線的平面可表示為：

$k_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0\ (k_1{}^2+k_2{}^2\neq 0)$。

證明 設 $f_1(x，y)= a_1x+b_1y+c_1z+d_1$，$f_2(x，y)= a_2x+b_2y+c_2z+d_2$

很容易可以證明交線 L 上的點都會在平面

$k_1f_2(x，y)+k_2f_2(x，y)=0$，其中 $k_1^2+k_2^2\neq 0$

設平面 E 通過交線 L，再 E 上取一點 $A(x_0，y_0，z_0)$，且 A 不在 L 上，

取 $k_1=f_2(x_0，y_0)$，$k_2=-f_1(x_0，y_0)$

考慮平面

$f_2(x_0，y_0)\cdot(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)-f_1(x_0，y_0)\cdot(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$

$=0$ (＊)

(＊) 很明顯會通過 L 上的兩點 B，C，故 (＊) 所代表的平面會通過 A，B，C 三點，因為通過不共線三點 A，B，C 的平面只有一個，即為平面 E。

因此平面 E 的方程式為

$f_2(x_0，y_0)\cdot(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)-f_1(x_0，y_0)\cdot(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$

$=0$。

$k_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 代表兩平面

$E_1：a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，$E_2：a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 交線 L 的平面，

當 $k_1=0$，代表平面 E_2，當 $k_2=0$，代表平面 E_1。

當 $k_1\neq 0$ 時，可以將 $k_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$ $=0$ 化成 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 的型式，

其中 $k=\dfrac{k_2}{k_1}$。

我們可以得到以下的結論：

通過直線 $L：\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0， \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2=0， \end{cases}$ 的平面

(除了平面 $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 之外)

可以表成 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 的型式。

例題 7

平面 E 包含 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$ 之交線且

(1) 通過點 $(2，-1，1)$ 時，平面 E 的方程式。

(2) 垂直於平面 $3x+2y-3z-6=0$ 時，平面 E 的方程式。

解 (1) 可令所求平面為 $2x+y-4+k(y+2z)=0$，

平面過 $(2，-1，1)\Rightarrow 4-1-4+k(-1+2)=0\Rightarrow k=1$，

$\Rightarrow$ 平面方程式為 $x+y+z-2=0$。

(2) 可令所求平面為 $2x+y-4+k(y+2z)=0$，

$\Rightarrow$ 法向量為 $\overrightarrow{n}=(2，k+1，2k)$，

$\Rightarrow (2，k+1，2k)\cdot(3，2，-3)=0\Rightarrow k=2$，

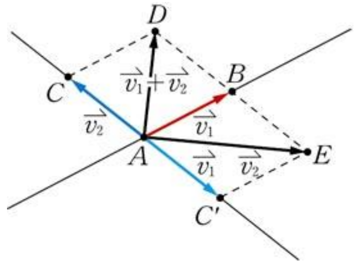
平面方程式為 $2x+3y+4z=4$。

例題 8

$L_1：\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{-3}$，$L_2：\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z}{2}$

(1) L_1 與 L_2 的交點坐標。

(2) L_1，L_2 二線交角平分線之方程式。



解 (1) 根據比例式可以得知交點為 (4，−5，0)。

(2) 設 $\overrightarrow{v_1}=(1，2，-3)$，$\overrightarrow{v_2}=(3，-1，2)$，

分別代表 L_1，L_2 方向向量，

因為 $|\overrightarrow{v_1}|=|\overrightarrow{v_2}|$ 且 $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}<0$，如右圖，

可以得知 $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$ 分別可以做為

L_1，L_2 二線交角平分線之方向向量。

故可以得到 L_1，L_2 二線交角平分線之方程式為

$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 或 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z}{5}$。