第三冊 2-1 空間中的直線與平面-空間概念與空間坐標系

【性質】
1. 空間的基本要素：點、線、面、體。
2. 畫圖時，有時配合上虛線可以增加立體感。
3. 直線通常只畫成有端點的線段。
4. 平面通常畫成有邊界的樣子，以有界的型式表示，便於理解與討論。

【性質】
1. 空間中，點、線、面有下列三個基本公設：
   (1)過空間中兩相異點，恰有一直線存在。
   (2)不在同一直線上的三相異點恰決定一平面。
   (3)若一直線上有相異兩點在一平面上，則此直線在該平面上。
   (4)若兩相異平面上有一共同點，則此兩平面的所有共同點恰為一直線。
2. 決定空間中一直線的條件：
   (1)空間中相異兩點。
3. 決定空間中一平面的條件：
   (1)空間中不共線三點。
   (2)一線與不在線上的一點。
   (3)相交於一點的兩線。
   (4)兩平行線。
4. 空間中直線與平面的關係如下：
   (1)直線與直線的關係：
      (a)相交：恰交於一點。
      (b)平行：共平面但不相交。
      (c)歪斜：不平行且不相交。
   (2)直線與平面的關係：
      (a)相交：直線與平面恰交一點。
      (b)平行：直線與平面不相交。
      (c)重合：直線在平面上。
   (3)平面與平面的關係：
      (a)相交：兩平面恰交於一直線。
      (b)平行：兩平面不相交。

註：平行不含重合。

【定義】
1. 空間中兩直線平行：
   空間中相異兩直線共平面而不相交，稱為平行。
2. 空間中兩直線互為歪斜：
   空間中相異兩直線不共平面，必不相交，稱此兩直線是一組歪斜線。
   註：空間中既不平行也不相交的兩直線。
3. 空間中兩平面平行：
   空間中相異兩平面E_1與E_2沒有共同點時，E_1與E_2就不相交，稱不平行，記為$E_1 // E_2$。當E_1與E_2有共同點時，E_1與E_2恰交於一直線。

【定義】

1. 直線L與平面E垂直：

   直線L與平面E交於一點P時，若平面E上，每一條過點P的直線都與直線L垂直，則稱直線L與平面E垂直。

   註：

   實際上只要兩條平面上的直線與直線L垂直即可得證直線L與平面E垂直。

2. 稜：

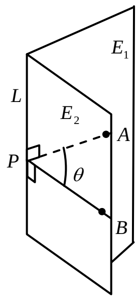
   兩平面E_1,E_2相交於一直線PQ，此直線稱為稜。

3. 二面角：

   相異兩半平面與稜的聯集稱為二面角，兩半平面E,F稱為此二面角的兩邊或兩面。當二面角為$90°$時，稱二面角為直二面角。

4. 二面角的平面角(兩半平面所構成的角)：

   假設直線L是二面角的稜，點P在直線L上，點A,B分別在二面角中的兩平面E_1,E_2上，且$\overline{PA}\perp L,\overline{PB}\perp L$，則$\angle APB$的角度是此二面角的平面角。



5. 兩平面的垂直與平行：

   兩平面相交有四個夾角，

   (1)若兩平面E_1,E_2的夾角為直角，則稱平面E_1與E_2垂直，記為$E_1\perp E_2$。

   (2)若兩平面E_1,E_2不相交，則稱平面E_1與E_2平行，記為$E_1 // E_2$。

【問題】

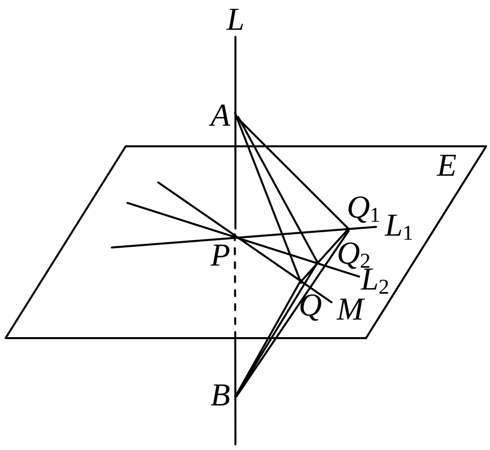
1. 一個長方體，以其中不同的頂點當始點與終點可以決定幾個不同向量？稜可以決定幾個不同向量？互相歪斜的稜共有幾個？
2. 設兩平面E_1,E_2所夾的二面角為θ，現有線段$\overline{AB}\in E_1$，試問$\overline{AB}$在平面E_2上的投影長度為何？是否為$\overline{AB}\cdot|\cos\theta|$？
3. 設兩平面E_1,E_2所夾的兩面角為θ，現有ΔABC面積為S，試問ΔABC在平面E_2上的投影面積為何？是否為$S\cdot|\cos\theta|$？
4. 設A,B為空間中的任意兩點，試問滿足$\overline{PA}=\overline{PB}$之點$P$所成圖形為何？

【定理】

1. 若直線L與平面E交於點P，則L與E垂直的充要條件是平面E上有過P的兩相異直線L_1,L_2與直線L垂直。

註：若只有一條直線與L垂直，則過此條直線的平面不一定是唯一。

證明：



(1)在直線L上取相異兩點A,B，

使$\overline{AP}=\overline{BP}$，

設直線M為平面E上過點P的直線，

在直線L_1,L_2,M上分別取點Q_1,Q_2,Q，

使這三點共線，

連接$\overline{AQ_1},\overline{AQ_2},\overline{AQ},\overline{BQ_1},\overline{BQ_2},\overline{BQ}$。

(2)因L_1,L_2垂直L於點P，

則L_1,L_2為$\overline{AB}$的中垂線，

所以$\overline{AQ_1}=\overline{BQ_1},\overline{AQ_2}=\overline{BQ_2}$，

又$\overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_1Q_2}$，

則$\Delta AQ_1Q_2\cong\Delta BQ_1Q_2$，

故$\angle AQ_1Q_2=\angle BQ_1Q_2$。

(3)因$\overline{AQ_1}=\overline{BQ_1},\angle AQ_1Q=\angle BQ_1Q$，

又$\overline{Q_1Q}=\overline{Q_1Q}$，

則$\Delta AQ_1Q\cong\Delta BQ_1Q$，

故$\overline{AQ}=\overline{BQ}$。

(4)因$\overline{AQ}=\overline{BQ}$，

所以$\overline{PQ}$為$\overline{AB}$的中垂線，

則$L\perp M\Rightarrow L\perp E$。

【定義】

1. 坐標平面：

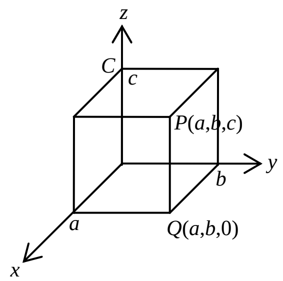
x 軸、y 軸再加上 z 軸就可建立一個空間坐標系，這三個軸都稱坐標軸，它們兩兩互相垂直，且交會於同一點，即原點，通常以 O 表示。x 軸與 y 軸所決定的平面稱為 xy 平面，y 軸與 z 軸所決定的平面稱為 yz 平面，z 軸與 x 軸所決定的平面稱為 zx 平面，這三個平面都稱為坐標平面。

2. 投影：

若過點 P 與平面 E 垂直的直線交平面 E 於 Q，則稱點 Q 為點 P 在平面 E 上的投影。

3. 空間坐標：

設點 P 在平面 E 上的投影為 Q，它在 xy 平面上的平面坐標為 (a,b)，P 點在 z 軸上的投影為 C，它在 z 軸上的坐標為 c，則稱點 P 的空間坐標為 (a,b,c)。我們稱 a,b,c 分別是 P 點的 x 坐標、y 坐標、z 坐標。



註：

設點 P 的坐標 (a,b,c)，點 P 在 xy 平面與 x 軸的投影分別為 Q,R，試問 Q 點在 x 軸的投影點是否為 R 點？(即點 P 直接投影到 x 軸上定坐標，結果是否相同？)

註：對點 $P(a,b,c)$ 而言：

(1)對 x 軸的投影點為 $(a,0,0)$，
對 y 軸的投影點為 $(0,b,0)$，
對 z 軸的投影點為 $(0,0,c)$。

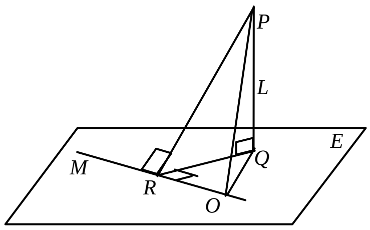
(2)對 xy 平面的投影點為 $(a,b,0)$，
對 yz 平面的投影點為 $(0,b,c)$，
對 zx 平面的投影點為 $(a,0,c)$。

(3)對原點的對稱點為 $(-a,-b,-c)$，
對 x 軸的對稱點為 $(a,-b,-c)$，
對 y 軸的對稱點為 $(-a,b,-c)$，
對 z 軸的對稱點為 $(-a,-b,c)$。

(4)對 xy 平面的對稱點為 $(a,b,-c)$，
對 yz 平面的對稱點為 $(-a,b,c)$，
對 zx 平面的對稱點為 $(a,-b,c)$。

4. 三垂線定理：

設 E 是一平面，直線 L 垂直平面 E 於 Q；M 為平面 E 上不經過點 Q 的直線；若過點 Q 的直線 QR 與直線 M 垂直於 R，則直線 L 上任意點 P，直線 PR 與直線 M 互相垂直。



證法一：

設 O 是直線 M 上異於 R 的一個點，

因 $\overline{PQ}\perp\overline{QR}\Rightarrow\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2=\overline{PR}^2$ 及 $\overline{QR}\perp\overline{OR}\Rightarrow\overline{QR}^2+\overline{OR}^2=\overline{OQ}^2$，

則 $\overline{PR}^2+\overline{OR}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2+\overline{OR}^2=\overline{PQ}^2+\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2$，

故直線直線 PR 與直線 M 互相垂直。

證法二：

因 $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{RO}=(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})\cdot\overrightarrow{RO}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RO}+\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{RO}=0+0=0$，

故 $\overrightarrow{PR}\perp\overrightarrow{RO}$。

註：

三垂線定理的逆命題：

若直線 PQ 垂直平面 E 於 Q 點，直線 PR 垂直平面 E 上不過點 Q 的一直線 M 於 R 點，則 QR 垂直直線 M 於 R 點。

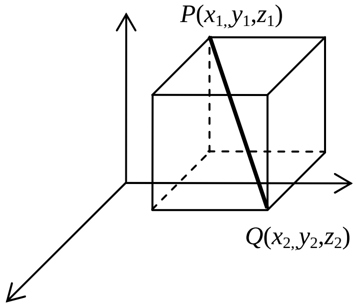
5. 第一卦限：

三個坐標平面將空間分割成八個區域，每個區域稱為一個卦限，x 坐標、y 坐標、z 坐標皆為正數的卦限稱為第一卦限。

6. 兩點的距離：

空間中兩點 $P(x_1,y_1,z_1)$ 與 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 的距離公式為

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。



註：對點 $P(a,b,c)$ 而言：

(1)到 x 軸的距離為 $\sqrt{b^2+c^2}$，到 y 軸的距離為 $\sqrt{a^2+c^2}$，到 z 軸的距離為 $\sqrt{a^2+b^2}$。

(2)到 xy 平面的距離為 $|c|$，到 yz 平面的距離為 $|a|$，到 zx 平面的距離為 $|b|$。

【性質】

1. 任兩相異直線必有公垂線。
2. 垂直於同一平面之兩相異直線必平行；
   垂直於同一直線之兩相異平面必平行。
3. 過直線上一點有無窮多直線與此直線垂直；
   過平面上一點恰可作一直線與此平面垂直。
4. 過直線外一點有無窮多直線與此直線垂直；
   過直線外一點恰可作一直線與此直線平行；
   過直線外一點恰可作一平面與此直線垂直；
   過直線外一點有無窮多平面與此直線平行。
5. 過平面外一點恰可作一直線與此平面垂直；
   過平面外一點有無窮多直線與此平面平行；
   過平面外一點有無窮多平面與此平面垂直；
   過平面外一點恰可作一平面與此平面平行。
6. 平面E上與不在E上的直線L若相交，其交點是唯一的。
   過此交點的直線有無窮多條，其中至少有一條直線與L垂直。

【問題】

1. 如何定義一組歪斜線的夾角？
   解：
   選擇一點O（可選在任何地方）
   過O分別作L_1,L_2的平行線L_1',L_2'
   規定L_1',L_2'之夾角為L_1,L_2的夾角。
2. 試求邊長分別為a,b,c的立方體中兩對角線的夾角為何？
3. 試求正四面體中任意兩面所夾二面角的大小？
4. 試求正八面體中任意兩面所夾二面角的大小？
5. 設金字塔型的各稜長均為a，試求兩側面所夾的兩面角為何？一側面與一底面所夾的二面角為何？
6. 試問正立方體的稜長中可以組成幾組歪斜線？
7. 試問過正立方體的頂點所形成的直線中可以組成幾組歪斜線？
8. 設正四面體任兩面所夾的二面角為θ，求$\cos\theta$之值。
   （解：$\frac{1}{3}$）

【公式】

1. 正三角形邊長為a，則

　(1)高為$\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

　(2)面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

2. 長方體三邊長為a,b,c，則對角線長為$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

3. (1)柱體體積=(底面積)×(高)。

　(2)錐體體積$=\frac{1}{3}\times$(底面積)×(高)。

　(3)球體半徑r，則

　　(a)表面積為$4\pi r^2$。

　　(b)體積為$\frac{4}{3}\pi r^3$。

4. 正四面體稜長為a，則

　(1)高為$\frac{\sqrt{6}}{3}a$。

　(2)體積為$\frac{\sqrt{2}}{12}a^2$。

　(3)表面積為$4\sqrt{3}a^2$。

　(4)內切球半徑為$\frac{\sqrt{6}}{12}a$。

　(5)外切球半徑為$\frac{\sqrt{6}}{4}a$。