第二章多項式

§2−1 簡單多項式函數及其圖形

(甲)函數

◆ 函數的概念

函數是描述兩個變量(變數)間的“對應變化”關係，在高中數學，它是一個既重要又基本的概念。例如：

例一“距離與時間”的關係。

乘“高鐵”從起站出發，車行 10 公里後開始計時，以均速 250 公里／時飛馳，車行的“距離”S (公里) 與“時間”t (時) 有下列關係：

$$S=250t+10 \quad (0\le t\le 1.6) \qquad \text{(A)}$$

例二“面積與半徑”的關係。

圓盤面積 A 與半徑 r 的關係為

$$A=\pi r^2 \quad (r\ge 0) \qquad \text{(B)}$$

例三氣體的“體積與氣壓”的關係 (波義耳定律)。

常溫下的氣體，它的體積 V 與氣壓 p 成反比，即

$$V=k\cdot\frac{1}{p} \quad (k\text{ 是常數，}p>0) \qquad \text{(C)}$$

上面三個例子都是函數關係。距離 S 的大小隨時間 t 的變化而改變，t 在某一個時段內取任一個值，就對應 S **唯一**又**確定**的值，**S 稱為 t 的函數。**

同理，**A 稱為 r 的函數，V 也是 p 的函數。**

(1)函數的定義：

設 x 與 y 是兩個變數，若 y 的值隨 x 所取的值依某一種“對應法則 f”而**唯一**確定時，則說 **y 是 x 的函數**，用記號 $y=f(x)$ 表示。

在函數關係 $y=f(x)$中，x 叫做**自變數**，y 叫做**因變數** (或**應變數**)。

自變數 x 取值的範圍稱作函數 f 的**定義域**，x 依**對應法則 f** 所對應的 y 值叫做 **x 的函數值**，記作 **$f(x)$**。

當 x 遍取定義域內每一個值時，全體函數值 $f(x)$ 的範圍，稱作函數 f 的**值域**。

函數的概念由三部分構成：

$$\text{定義域} \xrightarrow{\text{對應法則}f} \text{值域}$$

定義域是“自變數”取值的範圍。當“定義域”與“對應法則”確定後，應變數 y 取值的範圍 (值域) 也就隨著確定。

例一“距離與時間”關係中，

函數 $f(x)=250x+10$ ($0\le x\le 1.6$)的

定義域是一個閉區間 $0\le x\le 1.6$ (簡記作〔**0，1.6**〕)，

當 $x=0.5$ (時)，x 所對應的函數值為 $f(0.5)=135$ (公里)，

當 x 在定義域〔0，1.6〕內遍取每一個值時，

它所對應的 $f(x)$ 取值的範圍為 $10\le f(x)\le 410$，

即閉區間〔10，410〕就是 $f(x)$ 的值域。

(練習1) 設二次函數 $f(x)=x^2+2x-1$，試求 $f(x)$的定義域與值域。

Ans：定義域所有實數、值域為大於等於-2的實數

◆ 函數的圖形

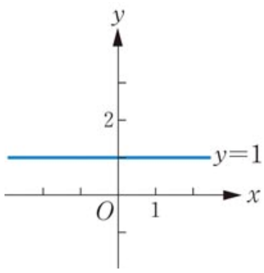
(1)何謂函數的圖形

在國中數學裡，我們學過常數函數、一次函數、二次函數的圖形。例如：

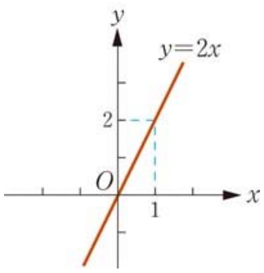
(1)常數函數 $y=1$ 的圖形，是由坐標為$(x，1)$的點所描出的水平直線。(如圖(a))

(2)一次函數 $y=2x$ 的圖形，是由坐標為$(x，2x)$的點所描出的一條傾斜直線。(如圖(b))

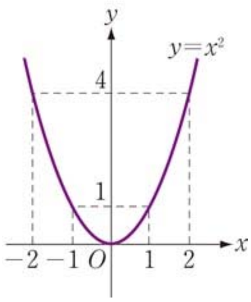
(3)二次函數 $y=x^2$ 的圖形，是由坐標為$(x，x^2)$的點所描出的一條拋物線。(如圖(c))



(a)



(b)



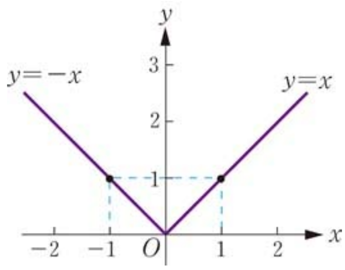
(c)

一般而言，函數 $y=f(x)$ 的圖形，其意義如下：

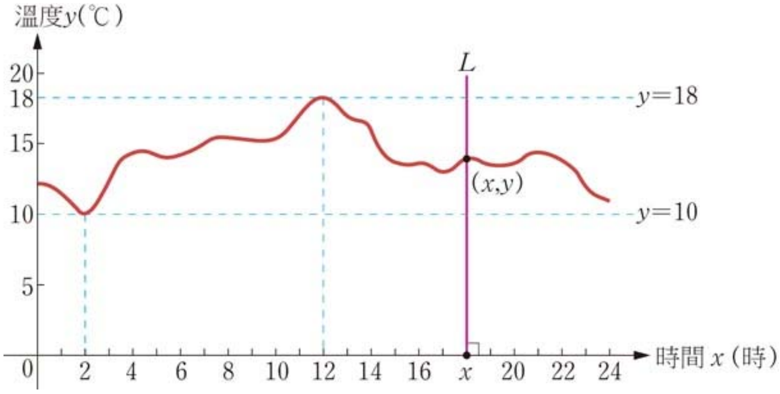
函數圖形的定義：

設 $y=f(x)$是一個函數($x，y$ 皆為實數)。在直角坐標平面中，當自變數 x 在定義域內任意變動時，一切以 $(x，f(x))$ 為坐標的點所描繪的曲線(包括直線)，稱為**函數 f 的圖形**。

[例題1] 試描出函數 $y=|x|$的圖形。



[例題2] “溫度”是隨著“時間”的改變而變化的。給了一個時間 x，就對應一個溫度 y，因此，溫度 y 是時間 x 的函數。下圖是某地一天 24 小時的溫度變化圖 (氣溫自動記錄器所繪)。讀圖後，回答下列問題：



(1) 在時間 12 時及 2 時，攝氏溫度分別為多少度？該日的溫差是多少度？

(2) 當 x 在〔0，24〕內變動時，求溫度 y 變動的範圍（ 值域 ）。

[解法]：

設 $y=f(x)$。(x 代表時間，y 代表溫度)

(1) $f(12)=18$ (℃)，$f(2)=10$ (℃)。

溫差為 $18-10=8$ (℃)。

(2) 函數 f 的定義域是〔0，24〕，對應的值域是〔10，18〕。

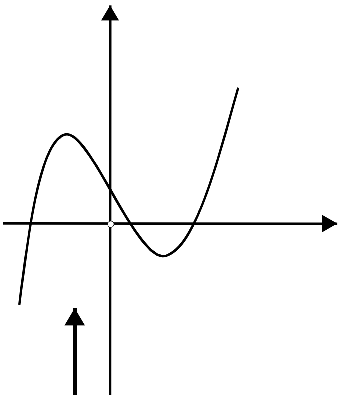
函數的圖形是函數的一種“幾何”表達方式。它讓我們對函數的“變化趨勢”有一個形象化的理解與掌握，並可解讀圖中所呈現的豐富訊息。

(2)函數圖形的特徵：

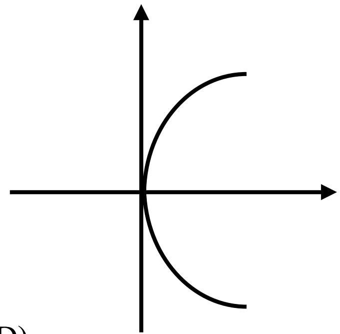
在坐標平面上，經過函數 $y=f(x)$ 定義域中任何一點 a，作垂直於 x 軸的直線 L，則 L 與函數的圖形恰好交於一點 $(a，f(a))$。(每一個 a，恰好對應一個 $f(a)$。)

[例題3] 下列何者是 y 為 x 的函數圖形？

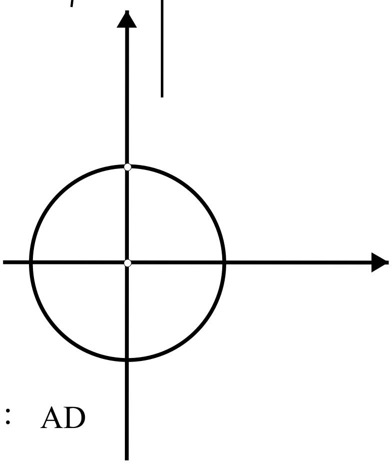
(A)



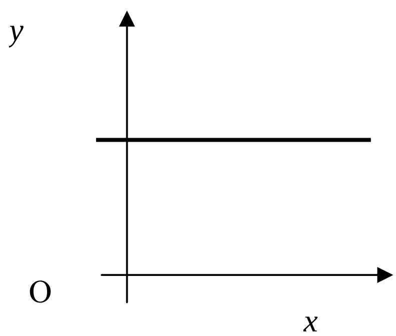
(B)



(C)



(D)



Ans： AD

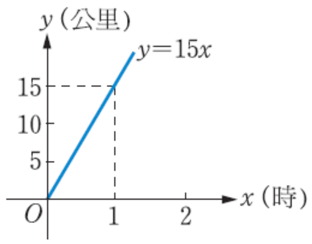
(丙)一次函數

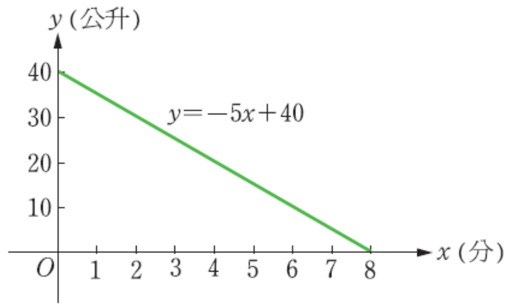
◆ 一次函數的實例：

(1°)騎自行車是很環保的健身運動，若自行車每小時的速度大小為 15 公里，則騎 x 小時後，行經的路程為 y 公里，y 與 x 的關係為 $y=15x$ $(x\ge0)$

(2°)水槽中原有存水 40 公升，打開水龍頭後每分鐘排出 5 公升，
x 分鐘後水槽內的水量有 y 公升，y 與 x 的關係為 $y=-5x+40$ $(0\le x\le8)$

(1°)(2°)的圖形如下所示：





◆ 一次函數(線性函數)：

(1)一次函數的定義：
設 $m\neq0$，若兩個變數 x,y 之間的關係可以表成 $y=mx+b$，則 y 稱為 x 的**一次函數**。
因為 y 為 x 的函數，因此上述的一次函數亦可表成 $f(x)=mx+b$。
若允許 $m=0$，那麼所有型如 $y=mx+b$ 的函數稱為**線性函數**。

(2)線性函數 $y=mx+b$ 中 x 項係數 m 的意義：

(a)自變數與因變數變化的角度：
(1°)設(x_0,y_0)在一次函數 $y=mx+b$ 的圖形上，即 $y_0=mx_0+b$

讓自變數 x_0 增加 h(h 可正可負)成為 x_0+h，

因變數 $f(x_0+h)=m(x_0+h)+b=mx_0+b+mh=y_0+a=f(x_0)+mh$

故因變數 $f(x_0+h)$增加 mh(mh 可正可負)成為 $f(x_0)+mh$。

(2°)當自變數 0 對應的因變數為 b，且自變數 x 的值每**增加** h 單位時($h>0$)時，其因變數 y 值必**增加(減少)**mh 單位，

則$\dfrac{y-b}{x-0}=m$，故 $y=mx+b$。

結論：
(A)若自變數 x 與因變數 y 間為線性關係，即 $y=mx+b$
(1°)當 $m>0$ 時：
　當自變數 x 的值每**增加** h 單位時($h>0$)，因變數 y 值必**增加** mh 單位。
(2°)當 $m<0$ 時：
　當自變數 x 的值每**增加** h 單位時($h>0$)，因變數 y 值必**減少** $|mh|$單位。
(3°)若 $m=0$，則不論自變數 x 的值如何變動，其因變數 y 值**恆為一個常數**。

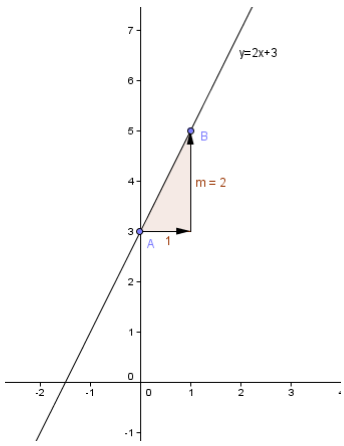
(B)若自變數 x 的值每**增加** h 單位時($h>0$)時，其因變數 y 值必**增加(減少)**mh 單位，則自變數 x 與因變數 y 間為**線性關係**，即 $y=mx+b$。

[例題4] 測量氣溫，常用攝氏和華氏兩種度數，已知攝氏每上升 1 度，華氏就上升$\frac{9}{5}$度，且攝氏 0 度時，華氏 32 度，設攝氏 x 度時，華氏 y 度
試回答下列各小題：
(1)請求出 y 與 x 的關係。
(2)攝氏 60 度時，華氏多少度？
(3)攝氏多少度時與華式的度數相同？
[解答]：
(1)因為攝氏每上升 1 度， 華氏就上升$\frac{9}{5}$度，所以 y 與 x 的關係是一個線性關係，故可設 $y=mx+k$，
又攝氏 0 度時，華氏 32 度，所以攝氏 1 度，華氏$(32+\frac{9}{5})$度
$\Rightarrow 32=m\cdot 0+k$，$32+\frac{9}{5}=m\cdot 1+k \Rightarrow m=\frac{9}{5}$，$k=32$。因此 $y=f(x)=\frac{9}{5}x+32$。
(2)$f(60)=108+32=140$(度)
(3)設 t 度時相等，$t=\frac{9}{5}t+32 \Rightarrow t=-40$
∴在零下 40 度時，攝氏與華式的度數相同。

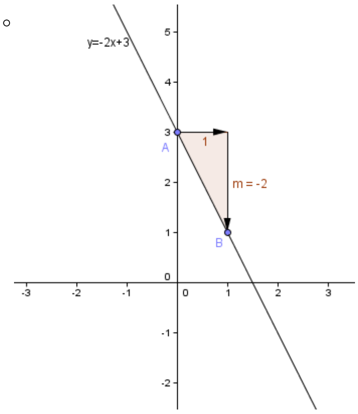
(b)函數圖形的角度：
國中時已知一次函數 $y=mx+b$ 的圖形為一直線 L，在 $y=mx+b$ 的圖形上取相異兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，所以 $y_1=mx_1+b$，$y_2=mx_2+b$
將兩式相減，可得 $y_1-y_2=m(x_1-x_2)$，因為 $x_1\neq x_2$，所以 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 。
$m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$這個式子可以解釋成：

一次函數 $y=mx+b$ 中 x 的係數 m 為$\dfrac{\text{相對應因變數的差}}{\text{相對應自變數的差}}$，這是直線 L 重要特徵。

於是我們定義 **x 的係數** m 為 $y=mx+b$ 圖形直線 L 的**斜率**。
舉例說明：
(1°)以一次函數 $y=2x+3$ 為例：
一次函數 $y=2x+3$ 的圖形如右圖所示之直線 L，
直線 L 的斜率為 2，自變數 x **增加** 1 單位，因變數 y **增加** 2 單位。
因此圖形從左下上升到右上。

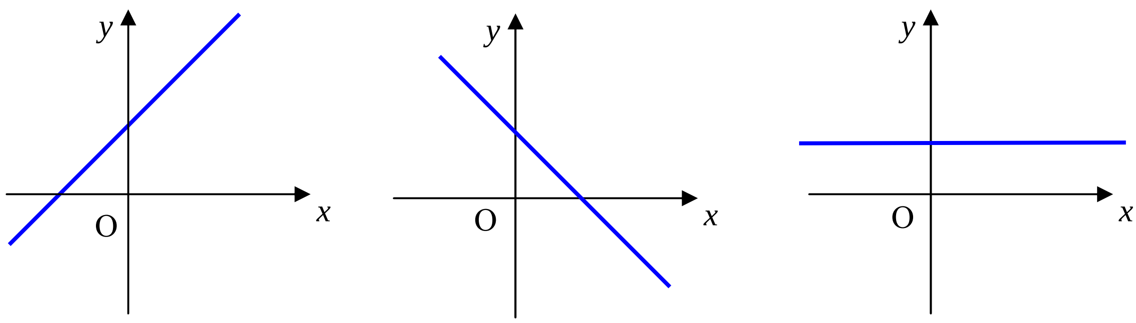


(2°)以一次函數 $y=-2x+3$ 為例：
一次函數 $y=-2x+3$ 的圖形如右圖所示之直線 M，
直線 M 的斜率為-2，自變數 x 增加 1 單位，因變數 y 減少 2 單位。
因此圖形從左上下降到右下。

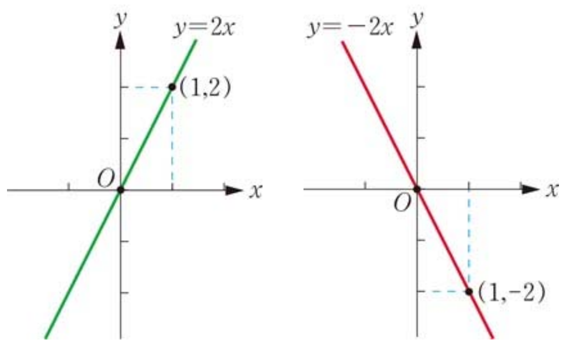


(3)線性函數 $y=mx+b$ 的圖形：

(i) m>0　　(ii)m<0　　(iii)m=0



[例題5] 描繪下列一次函數的圖形：
(1) $y=2x$。　　(2) $y=-2x$。
[分析]：
$y=ax$ 之圖形，是恆過原點（0，0）與另一點（1，a）的直線。
[解法]：
(1)$y=2x$ 的圖形是過兩點（0，0）與（1，2）的一條直線，如圖 (a)。
(2) $y=-2x$ 的圖形是過兩點（0，0）與（1，-2）的一條直線，如圖 (b)



(a)　　(b)

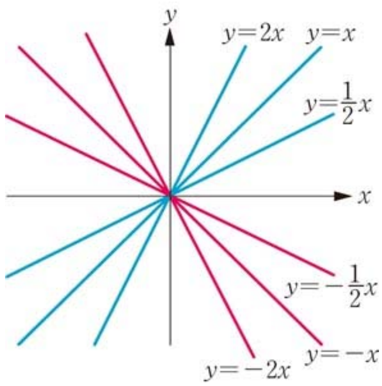
一次函數 $y=ax$ 的圖形是恆過原點的一條直線 L。L 之“傾斜程度”，完全由另一點（1，a）的位置來決定。

結論：直線 $y=ax$ 的圖形傾斜程度與係數 a

直線：$y=ax$ 恆通過原點與一點（1，a）

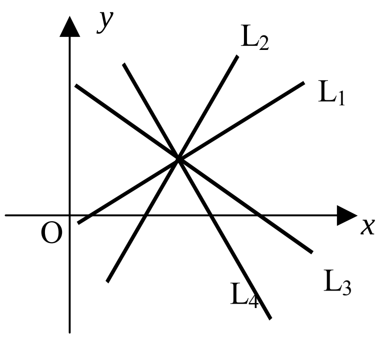
(1) 當 $a>0$ 時，點（1，a）在 x 軸上方，故直線由左往右上升。
並且 a 值愈大，傾斜程度也愈大。

(2) 當 $a<0$ 時，點（1，a）在 x 軸下方，故直線由左往右下降。
並且 $|a|$ 愈大，傾斜程度也愈大。



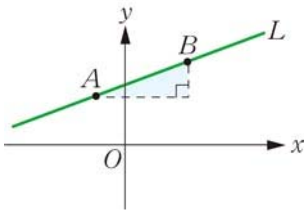
[例題6] 如右圖，設 m_1,m_2,m_3,m_4 各為一次函數的圖形直線 L_1,L_2,L_3,L_4 的斜率，試比較 m_1,m_2,m_3,m_4 的大小。

Ans：$m_2>m_1>m_3>m_4$



[例題7] 已知直線 L 上有兩點 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，試求直線 L 的斜率。(其中 $x_1\neq x_2$)
用 A，B 的坐標來表示斜率 a。

Ans：$\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$



結論：
直線斜率的絕對值代表傾斜程度：傾斜程度愈大，則其斜率的絕對值也愈大，而且
(1°)當直線由左下到右上傾斜時，其斜率為正。
(2°)當直線由左上到右下傾斜時，其斜率為負。
(3°)當直線成水平時，其斜率為 0。

(練習2) 設一次函數 $f(x)=ax+b$。
(1) 若 $f(2)=-1$，$f(-1)=8$，則 $f(x)=$______。
(2) 若 $y=f(x)$ 之圖形平行於直線 $y=3x+5$，並且與 y 軸交於點 $(0,-2)$，則 $f(x)=$______。
Ans：(1)$f(x)=-3x+5$　(2)$f(x)=3x-2$

(練習3) 已知線性函數的圖形過點$(2,3)$，且斜率為 $\frac{1}{2}$，求此函數。
Ans：$y=\frac{1}{2}x+2$

(練習4) 某次數學測驗，全班的分數普遍低落，最低 30 分，最高 70 分。老師為了提振學習興趣，決定用一次函數 $f(x)=ax+b$，將"原始分數 x"調升為"新分數 $f(x)$"。將"最低 30 分調升為 50 分，最高 70 分調升為 100 分"。試求：
(1) 調升分數的一次函數 $f(x)$。
(2) 原始分數 50 分者，調升後的分數為何？
(3) 經調升後及格者(不小於 60 分)，其原始分數(整數)最少多少？
Ans：(1)$f(x)=\frac{5}{4}x+\frac{25}{2}$　(2)75　(3)38 分

(練習5) 設 $f(x)=2002x+2003$，求 $\frac{f(8888)-f(6666)}{8888-6666}=$？　Ans：2002

(丁)二次函數

二次函數 $y=f(x)$有多種不同的呈現形式，常見的有
一般形式：$f(x)=ax^2+bx+c$ [可以配成 $y=a(x-h)^2+k$]
頂點形式：$f(x)=a(x-h)^2+k$ [便於作二次函數的圖形，討論 $f(x)$的最大值與最小值]
因式形式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ [便於解方程式 $f(x)=0$ 的解]

◆ 二次函數的定義與圖形：
(1)二次函數的定義：
設 a,b,c 為給定的實數， $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$稱為**二次函數**。

(2)二次函數的圖形：
二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形上的點為$(x,f(x))$，點$(x,f(x))$形成二次函數的圖形。

一般說來，二次函數的圖形是**拋物線**，基本的作圖方式是描點，更精確點，則觀察其**對稱軸與極值**，可幫助我們做圖。

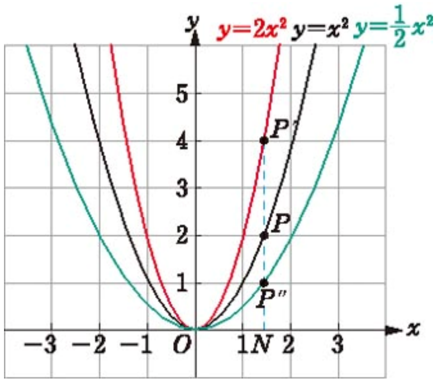
(3)二次函數圖形的伸縮與平移：

(a)圖形伸縮與對稱

舉例講解：

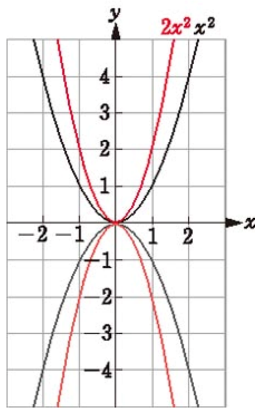
利用 $y=x^2$ 的圖形，作出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 及 $y=2x^2$ 的圖形。

壓縮與伸展 $\boxed{y=\frac{1}{2}x^2} \xleftarrow[\frac{1}{2}\text{倍}]{\text{鉛直壓縮}} \boxed{y=x^2} \xrightarrow[2\text{倍}]{\text{鉛直伸展}} \boxed{y=2x^2}$



$\overline{P'N}=2\,\overline{PN}$

$\overline{P''N}=\frac{1}{2}\overline{PN}$



舉例講解：

利用 $y=ax^2$ 的圖形，作出 $y=-ax^2$ 的圖形

點 $P(r，s)$ 滿足 $y=ax^2 \iff s=ar^2$

$\iff -s=-ar^2 \iff$ 點 $P'(r，-s)$ 滿足 $y=-ax^2$。

$y=ax^2$ 的圖形與 $y=-ax^2$ 的圖形對稱於 x 軸。

一般而言：

$y=f(x)$的圖形 $\xrightarrow[k\text{倍}]{\text{鉛直伸縮}}$ $y=k\,f(x)$的圖形

點 $P(r,s)$ $\xrightarrow[k\text{倍}]{\text{鉛直伸縮}}$ 點 $Q(r,ks)$　$k>0$

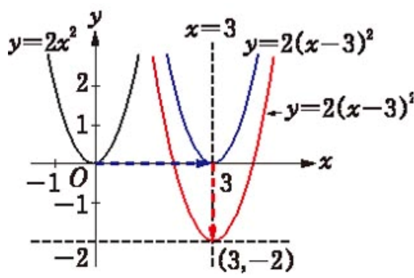
(b)圖形的平移

舉例講解：

利用 $y=2x^2$ 的圖形，作出 $y=2(x-3)^2$ 及 $y=2(x-3)^2+(-2)$ 的圖形。

點 $P(r，s)$ $\xrightarrow[3\text{個單位}]{\text{右移}}$ 點 $P'(r+3，s)$ $\xrightarrow[2\text{個單位}]{\text{下移}}$ $P''(r+3，s-2)$

$\boxed{y=2x^2} \xrightarrow[3\text{個單位}]{\text{右移}} \boxed{y=2(x-3)^2} \xrightarrow[2\text{個單位}]{\text{下移}} \boxed{y=2(x-3)^2-2}$

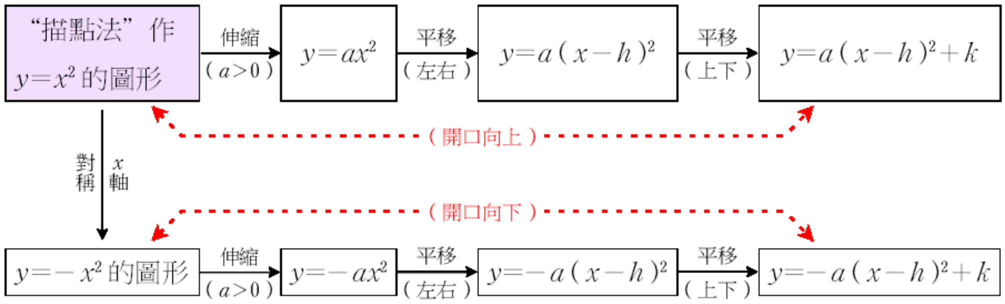


一般情形：

$y=f(x)$的圖形 $\xrightarrow[h\text{單位}]{\text{左右平移}}$ $y=f(x-h)$的圖形 ($h>0$ 右移；$h<0$ 左移)

$y=f(x)$的圖形 $\xrightarrow[k\text{單位}]{\text{上下平移}}$ $y=f(x)+k$ 的圖形 ($k>0$ 上移；$k<0$ 下移)

結論：



例如：

將 $y=x^2$ 的圖形應如何伸縮、對稱、平移才得到 $y=-3x^2-6x-4$ 的圖形。

Ans：

$y=x^2 \xrightarrow{\text{對}x\text{軸做鏡射}} y=\ -x^2 \xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸伸縮3倍}} y=-3x^2 \xrightarrow{\text{沿 }x\text{ 軸向左移動1單位}} y=-3(x+1)^2$

$\xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸向下移動1單位}} y=-3(x+1)^2-1$

(練習6) 將 $y=2x^2-6x+8$ 的圖形水平移動 3，鉛直移動-5，形成另一個圖形，求此圖形的頂點與對稱軸。Ans：$(\frac{3}{2}\ ,-\frac{3}{2})$，$x=\frac{3}{2}$

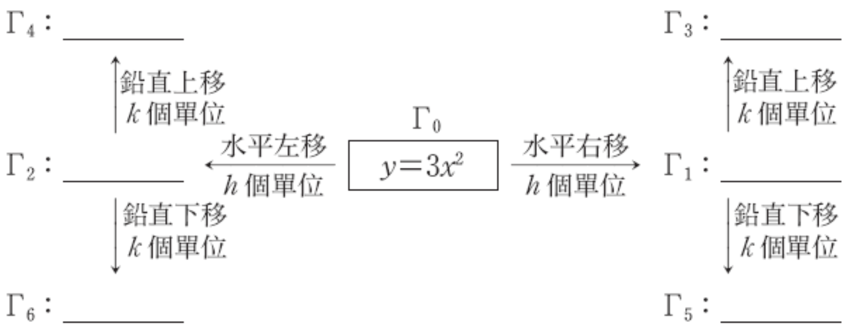
(練習7) 將 $y=x^2$ 的圖形應如何伸縮、對稱、平移才得到 $y=2(x+1)^2-2$ 的圖形。

Ans：

$y=x^2 \xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸伸縮2倍}} y=2x^2$

$\xrightarrow{\text{沿 }x\text{ 軸向左移動1單位}} y=2(x+1)^2 \xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸向下移動2單位}} y=2(x+1)^2-2$

(練習8) 寫出下列空格所對應的二次函數：



(4)二次函數 $f(x)$的最大值與最小值：

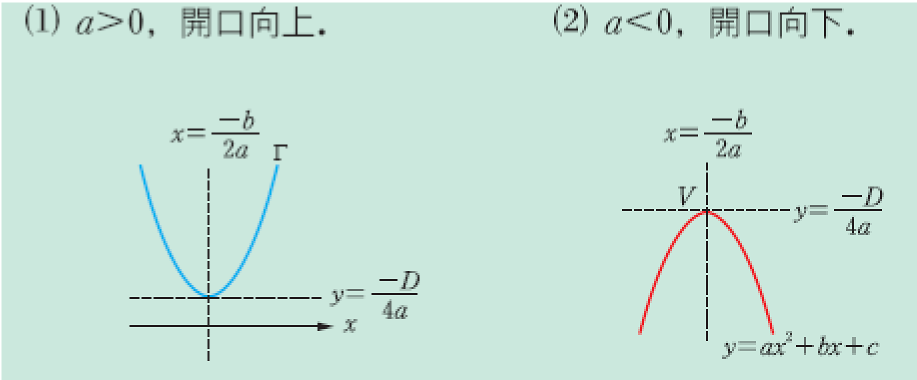
將二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 化成頂點形式 $y=a(x-h)^2+k$ 後，除了較易掌握函數值 $f(x)$ 的變化趨勢，並可進而求出 $f(x)$ 的最大值、最小值。

以下分兩種情況討論：

(i) x 在整條數軸上變動。

(ⅱ) x 在閉區間〔 a，b 〕內變動。

(a)利用配方法找二次函數的頂點與對稱軸：
考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形為拋物線，利用配方法
$y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$
可知拋物線之對稱軸為 $x=-\frac{b}{2a}$，頂點為$(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$



[例題8] 已知有一個二次函數 $y=f(x)$，其圖形通過下列三點 $P(-1，0)$，$Q(2，3)$，$T(0，3)$。試求：
(1) $f(x)$ 及 $f(3)$。　　(2) $y=f(x)$ 的頂點及對稱軸方程式。
Ans：(1) $f(x)=-x^2+2x+3$，$f(3)=-9+6+3=0$。
(2) 頂點坐標是 $(1，4)$，對稱軸方程式是 $x=1$。

(練習9) 設 $f(x)$ 是二次函數，已知 $f(1)=4$，$f(2)=3$，$f(0)=7$，試求 $f(x)$。
〔表成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 之形式〕　Ans：$f(x)=(x-2)^2+3$

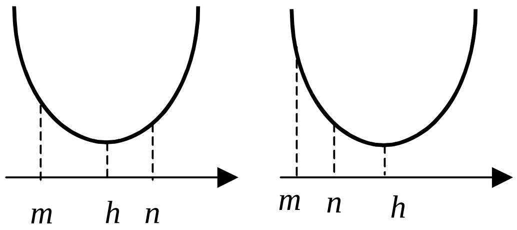
(b)沒有範圍限制求極值：
考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 利用配方法
$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$.....(∗)
(a)$a>0$ 時，由(∗)式可得 $y\geq-\frac{b^2-4ac}{4a}$，所以拋物線的開口向上，
最低點為$(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$，
因為**圖形最低點的 y 坐標為最小值**，故最小值為$-\frac{b^2-4ac}{4a}$。
(b)$a<0$ 時，由(∗)式可得 $y\leq-\frac{b^2-4ac}{4a}$，所以拋物線的開口向下，

最高點為$(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a})$，因為**圖形最高點的 y 坐標為最大值，**

故最大值為$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$。

(c)**有範圍限制求極值：**

二次函數 $y=f(x)=a(x-h)^2+k$，$m\le x\le n$，求 y 的最大值，最小值。



(1°)$m\le h\le n$，則比較 $f(m),f(h),f(n)$可求得最大，最小。

$a>0\Rightarrow f(h)$最小，m,n 中離對稱軸較遠者發生最大值。

$a<0\Rightarrow f(h)$最大，m,n 中離對稱軸較遠者發生最小值。

(2°)h 不在 m,n 之間，比較 $f(m),f(n)$可求得最大值、最小值。

$a>0$：m,n 中離對稱軸較遠者發生最大值，離對稱軸較近者發生最小值。

$a<0$：m,n 中離對稱軸較遠者發生最小值，離對稱軸較近者發生最大值。

[例題9] 求下列二次函數在閉區間上的最大值與最小值。

(1)$y=(x-1)^2+2\ (-1\le x\le 2)$

(2)$y=-x^2+2x+6\ (2\le x\le 3)$

解：(1) 頂點 $V(1,\ 2)$ 的橫坐標為 1，
而 1 在閉區間〔$-1,\ 2$〕內．
此時須比較頂點與閉區間兩端點
所對應的函數值．
當 $x=1$ 時，$y=2$ 是最小值．
當 $x=-1$ 時，$y=6$
當 $x=2$ 時，$y=3$ $\Big\}$ $y=6$ 是最大值．
如圖 2-22 所示．

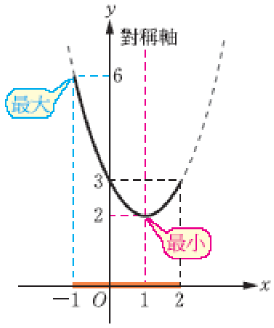


圖 2-22

(2) $y=-x^2+2x+6$
$=-(x-1)^2+7\quad(2\le x\le 3)$
頂點 $V(1,\ 7)$ 的橫坐標為 1，
而 1 不在閉區間〔$2,\ 3$〕內．
此時只須比較閉區間兩端點所對應的
函數值即可．
當 $x=2$ 時，$y=6$，
當 $x=3$ 時，$y=3$．
$y=6$ 是最大值，
$y=3$ 是最小值．
如圖 2-23 所示．

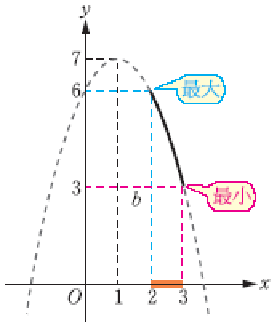


圖 2-23

[例題10] 設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3。試求數對(a,b)的所有可能值。
Ans：$(a,b)=(1,4)$、$(-1,6)$

(練習10) 二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形的頂點為$(-2,3)$，並經過$(0,-9)$，求 $f(x)=$？Ans：$-3x^2-12x-9$

(練習11) 二次函數 $y=ax^2+bx+5$，於 $x=2$ 時，有最小值 1，則 $a=$？$b=$？
Ans：$a=1, b-4$

(練習12) 函數 $y=f(x)=x^2+2x-3$
(1)若 $-2\le x\le 2$，則 $x=$______時，$f(x)$有最大值________；$x=$______時，$f(x)$有最小值________。
(2)若 $0\le x\le 3$，則 $x=$______時，$f(x)$有最大值________

；x=______時，$f(x)$有最小值_________。

Ans：(1)$x=2$ 時 $f(x)$有最大值$=5$，$x=-1$ 時 $f(x)$有最大值$=-4$

(2)$x=3$ 時 $f(x)$有最大值$=12$，$x=0$ 時 $f(x)$有最大值$=-3$

(練習13) 設 x,y 為實數，且 $x^2+3y^2=1$，

(1)請找出 x 的範圍。(2)求 $4x+3y^2$ 之最小值、最大值為何？

Ans：(1)$-1\le x\le 1$ (2)當 $x=1$ 有最大值 4；當 $x=-1$ 時，有最小值-4

(練習14) x 為實數，求 $y=(x^2+3x+1)(x^2+3x+2)+3x^2+9x+2$ 之最小值。

Ans：$x=-\dfrac{3}{2}$，y 有最小值$-\dfrac{71}{16}$

[提示：令 $t=x^2+3x$，並且要注意 t 的範圍]

(5)二次函數的正定性：

在什麼條件下，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的值會恆大於 0(恆小於 0)呢？

利用配方法將二次函數化成頂點形式：

$y=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=a(x-h)^2+k$，其中頂點 $V(h,k)=(\dfrac{-b}{2a}，\dfrac{-D}{4a})$，$D=b^2-4ac$

x 在實軸上任意變動對應的 y 值恆大於 0

$\Longleftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$ 的圖形 Γ 恆位在 x 軸上方（如圖 2-28）

$\Longleftrightarrow$ Γ 的開口朝上（$a>0$）且頂點位在 x 軸上方（$\dfrac{-D}{4a}>0$）

$\Longleftrightarrow$ $a>0$，且 $D<0$

故 對任意實數 x，ax^2+bx+c 恆大於 0

$\Longleftrightarrow$ $a>0$，且 $D<0$

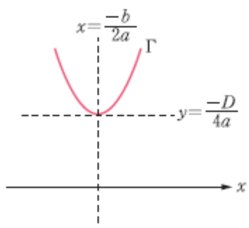
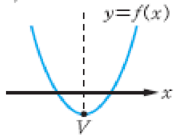
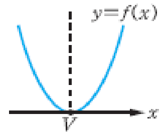
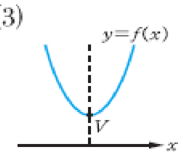
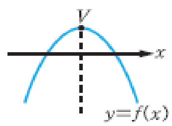
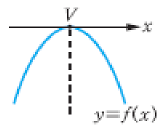
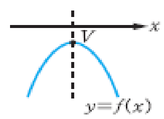


圖 2-28

下表是用 a 與 D 的正負來判定圖形Γ與 x 軸的位置關係：

(1)a 的正負掌控了拋物線開口的方向與大小。

(2)a 與 D 的正負決定了拋物線頂點是位於 x 軸的上方或下方。

D \ a	$D>0$	$D=0$	$D<0$	頂點
$a>0$ 開口向上	(1)  "頂點"在 x 軸下方	(2)  "頂點"在 x 軸上	(3)  "頂點"在 x 軸上方 $f(x)$ 恆正	$V(\frac{-b}{2a},\frac{-D}{4a})$ 請注意：頂點 V y 坐標 $\frac{-D}{4a}$ 的正、負
$a<0$ 開口向下	(4)  "頂點"在 x 軸上方	(5)  "頂點"在 x 軸上	(6)  "頂點"在 x 軸下方 $f(x)$ 恆負	

(練習15) 設 $f(x)=2x^2-3x+k$，若不論 x 為任何實數，對應的 $f(x)$ 值恆為正值，試求實數 k 的範圍。　Ans：$k>\frac{9}{8}$。

(戊)多項式函數

◆ 多項式函數與其圖形：

由實係數的 n 次多項式所定義的一個函數，稱為**多項式函數**，又稱為 **n 次函數**。

(1)多項函數的實例：

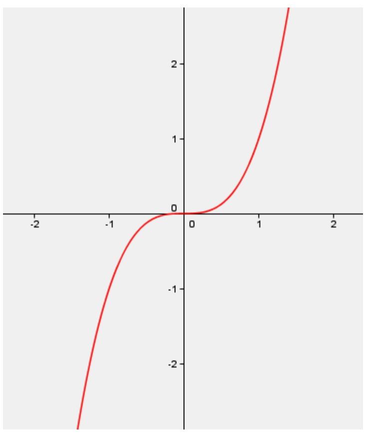
函數 $f：x\to x^2+x+1$，即 $f(x)=x^2+x+1$ 為一個二次函數。

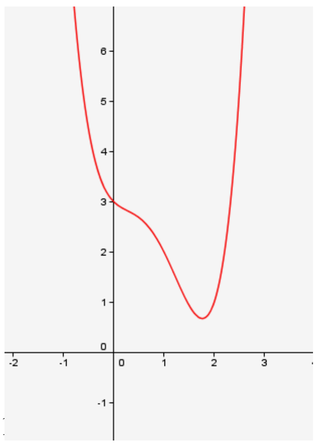
函數 $f：x\to x^3+2x^2+x+4$，即 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$ 為一個三次函數。

多項函數的定義域：所有的實數。

函數的圖形：由點$(x,f(x))$所形成的圖形，稱為 $y=f(x)$的圖形。

例如：左圖是 $f(x)=x^3$ 的圖形，右圖是 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-x+3$ 的圖形，這些圖形都是**連續不斷**的。





結論：

(1°)函數 $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$，稱為**多項式函數**。

若 $a_n\neq 0$，則 $y=f(x)$稱為 n 次多項式函數，簡稱為 **n 次函數**。

當 x 用 a 代入函數時，得到 $f(a)$稱為函數 $y=f(x)$在 $x=a$ 的函數值。

(2°)多項函數 $y=f(x)$的圖形構成一條連續不斷的曲線。

(練習16) 利用 GeoGebra 描繪出 $f(x)=x^3$，$f(x)=x^4$，$f(x)=x^5$，...的圖形，並據此描述 $f(x)=x^n$ 圖形特徵。

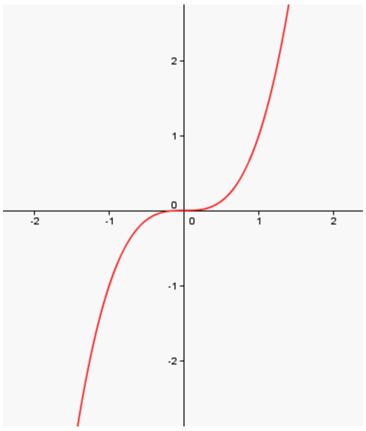
(2)三次、四次單項函數：

對於一般多項式函數的圖形，於高三數學甲下冊微分的課程中會做介紹，接下來針對 $y=x^3$、$y=x^4$ 的圖形及它們經過「伸縮、對稱、平移」後的圖形作探討。

[例題11] 試透過 GeoGebra 繪出 $y=x^3$ 的圖形，並且討論其圖形的特徵。

圖形特徵：

(1)圖形Γ由左向右上升。



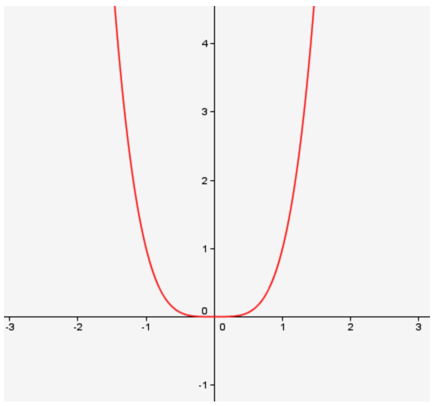
(2)圖形Γ對稱對稱於原點(0,0)

[例題12] 試透過 GeoGebra 繪出 $y=x^4$ 的圖形，並且討論其圖形的特徵。

圖形特徵：

(1)當 $x\geq 0$ 時，圖形Γ由左向右上升。

當 $x\leq 0$ 時，圖形Γ由左向右下降。

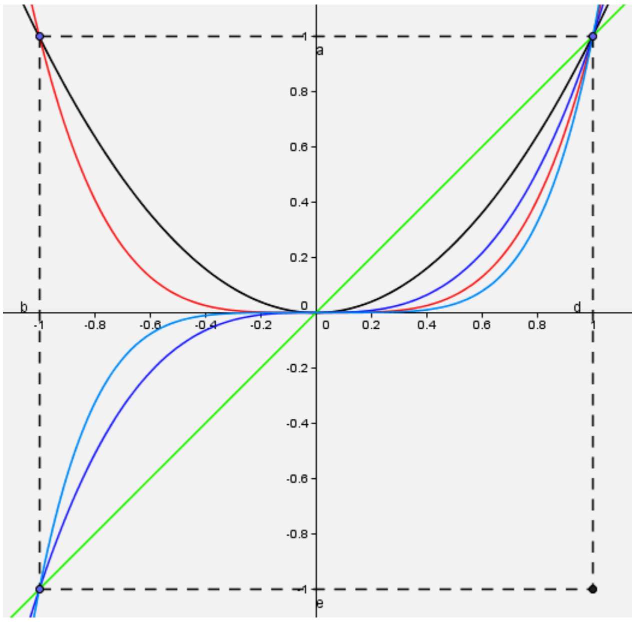


(2)圖形Γ對稱對稱 y 軸。

[討論]：

試透過 GeoGebra 繪出 $y=x^n$ 的圖形，
並且討論其圖形的特徵。

n 為奇數：



n 為偶數：

[例題13] (1)利用「伸縮、對稱、平移」來討論 $y=x^3$ 與 $y=2(x+1)^3-3$ 兩個圖形的關係。

(2)利用「伸縮、對稱、平移」來討論 $y=x^3$ 與 $y=-2(x+1)^3-3$ 兩個圖形的關係。

(練習17) 利用「伸縮、對稱、平移」來討論 $y=x^4$ 與 $y=\frac{1}{2}(x-2)^4+1$ 兩個圖形的關係。

Ans：$y=x^4 \xrightarrow{\text{沿鉛直方向伸縮}\frac{1}{2}\text{倍}} y=\frac{1}{2}x^4 \xrightarrow{\text{向右平移2單位}}$

$y=\frac{1}{2}(x-2)^4 \xrightarrow{\text{向上平移1單位}} y=\frac{1}{2}(x-2)^4+1$

(3)奇偶函數

奇函數：

對定義域內每一點 x，若函數 $f(x)$ 恆有 $f(-x)=-f(x)$，則稱 $f(x)$ 為奇函數。

偶函數：

對定義域內每一點 x，若函數 $f(x)$ 恆有 $f(-x)=f(x)$，則稱 $f(x)$ 為偶函數。

[例題14] 奇偶函數的圖形特徵

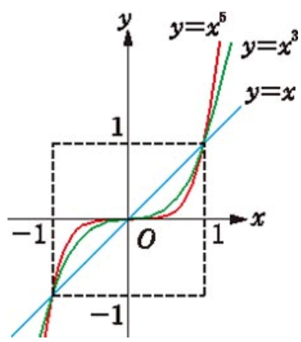
(1)奇函數的圖形對稱原點。

(2)偶函數的圖形對稱 y 軸。

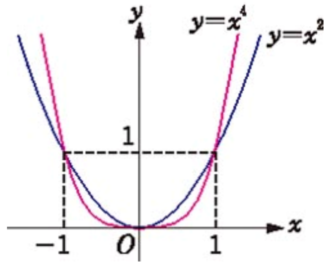
圖形 Γ 對稱於原點 $(0，0)$。

(1) Γ 上任一點 $P(x，f(x))$ 關於原點的對稱點為

$P'(-x，-f(x))=(-x，f(-x))$ 在 Γ 上。



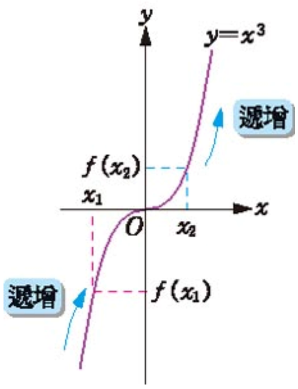
(2) Γ 上任一點 $P(x, f(x))$ 關於 y 軸對稱點為
$P'(-x, f(x))=(-x, f(-x))$ 在 Γ 上。

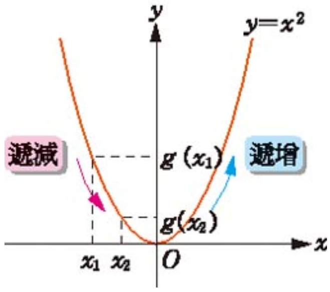


(練習18) 利用 GeoGebra 繪出下列函數圖形：
$y=x+x^3$、$y=x^3-2x$、$y=x^2+4$、$y=x^4+3x^2+1$、$y=2(x-1)^3$
並且判斷這些函數是奇函數或偶函數。
Ans：$y=x+x^3$、$y=x^3-2x$ 為奇函數；$y=x^2+4$、$y=x^4+3x^2+1$ 為偶函數
$y=2(x-1)^3$ 不是奇函數也不是偶函數。

(練習19) 設 f：A→B 為一個函數，定義 $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$，$h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$
請證明：$g(x)$為一個偶函數，$h(x)$為一個奇函數。

(4)單調函數：
觀察實例：
像三次函數 $f(x)=x^3$ 在定義域上,函數值 $f(x)$ 會隨自變數 x 的增大而遞增（對應在函數圖形上，就是其圖形由左而右上升，如下圖)。

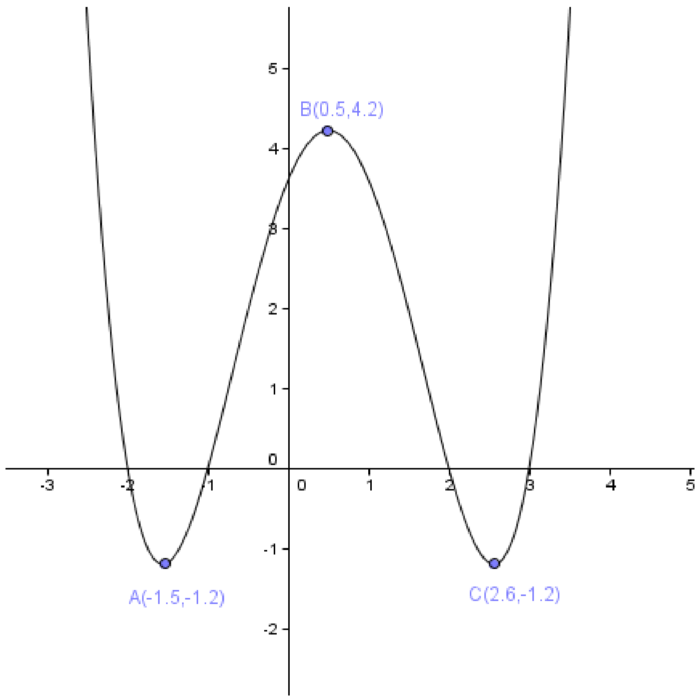




而像二次函數 $g(x)=x^2$，（如上圖)。
當 $x\le 0$ 時，函數值 $g(x)$ 隨 x 的增大反而遞減；當 $x\ge 0$ 時，x 愈大，函數值也愈大。

(a)定義單調函數：
設 I 為 $f(x)$定義域內的一個區間
遞增函數(嚴格遞增函數)：對於 I 內的任意兩點 x_1、x_2 若滿足：
$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ ($f(x_1)<f(x_2)$)，則稱 $f(x)$在 I 上是遞增函數(嚴格遞增函數)
遞減函數(嚴格遞減函數)：對於 I 內的任意兩點 x_1、x_2 若滿足：
$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)，則稱 $f(x)$在 I 上是遞減函數(嚴格遞減函數)
區間上的遞增函數(嚴格遞增函數)或遞減函數(嚴格遞減函數)都稱為 I 上的單調函數。

(練習20) 如圖為 $y=f(x)$的部分圖形，請指出在那些區間為遞增或遞減？



綜合練習

(1) 設 $f(x)$為一次函數，

(a)如果 x 增加 4 單位時，其對應之 $f(x)$就增加 10 單位，又 $f(4)=12$， 則 $f(x)=$？

(b)若 $f(x)=1998x+9876$，則求$\dfrac{f(56789)-f(12345)}{56789-12345}=$________。

(2) 華氏（Fahrenheit）溫度計（°F）與攝氏（Celsius）溫度計（℃）的關係如右表：

(a) 設攝氏 x ℃時，華氏為 y °F，將 y 表成 x 的一次函數。

(b) 若攝氏 x ℃的範圍為 $20 \le x \le 25$，人體感覺"清爽舒適"，試求對應的華氏 y °F的範圍。

(3) 人的「肱骨」是手臂「從肘部到肩部」的骨頭。人類學家用肱骨的長度（單位：公分）來估計男性、女性的身高（單位：公分），其線性關係如下：

$M(x)=2.89x+70.64$ 男性身高

$F(x)=2.75x+71.48$ 女性身高

其中 x(公分)代表肱骨的長度。某廢墟中發現一根 30 公分長的肱骨

(a) 此肱骨若屬男性，他有多高？

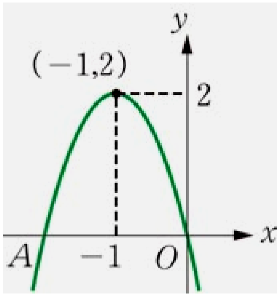
(b) 此肱骨若屬女性，她有多高？

(4) 二次函數 $y=f(x)$ 的圖形如右圖所示。

(a) 寫出 A 點坐標。

(b) 求出 $f(x)$。

(c) 寫出使 y 坐標為正數的 x 範圍。



(5) 設 a,b,c 為實數。若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過$(0,-1)$且與 x 軸相切，則下列選項何者為真？

(A) $a<0$(B) $b>0$(C) $c=-1$(D) $b^2+4ac=0$(E) $a+b+c\le 0$ (90 學科能力測驗)

(6) 設 a,b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$，試問下列何者為真？

(A)$f(0)>0$ (B)$f(-1)>0$ (C)$f(-2)>0$ (D)$f(-3)>0$ (E)$f(-4)>0$ (87 學科能力測驗)

(7) 某玩具飛機製造工廠，每次接到訂單都需要開模費 5 萬元，且製造一千個玩具飛機的材料費需 2 萬元，由此建立生產的成本函數 $f(x)=5+2x$，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量(千個)	**報價總值(萬元)**
5	**37.5**
10	**70**
15	**97.5**

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$，以及獲利函數 $h(x)=g(x)-f(x)$

(a)試求報價總值函數 $g(x)$。

(b)試問當訂單數量是多少時，獲利總價最高？

(8) 求下列二次函數在閉區間上的最大值及最小值。

(a) $f(x)=3x^2-12x+7$　　($0\le x\le 5$)。

(b) $g(x)=-2x^2-4x+1$　($-5\le x\le -2$)。

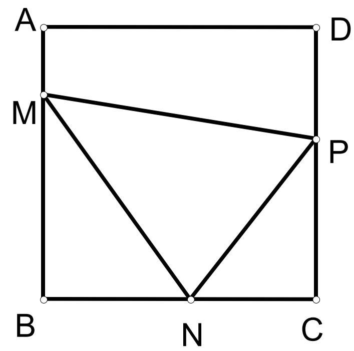
(9) 設 k 為實數，二次函數 $y=-2x^2+4x+k+1$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點，試求 k 的範圍。

(10) (a)請作出 $y=|x-1|$的圖形。

(b)利用(a)的圖形說明如何由水平位移與鉛直位移得出下列圖形：

①$y=|x-4|$②$y=|x+1|+3$

(11) 求 $f(x)=-x^2+4x+2$ $(-3\le x\le 5)$ 的最大值與最小值。



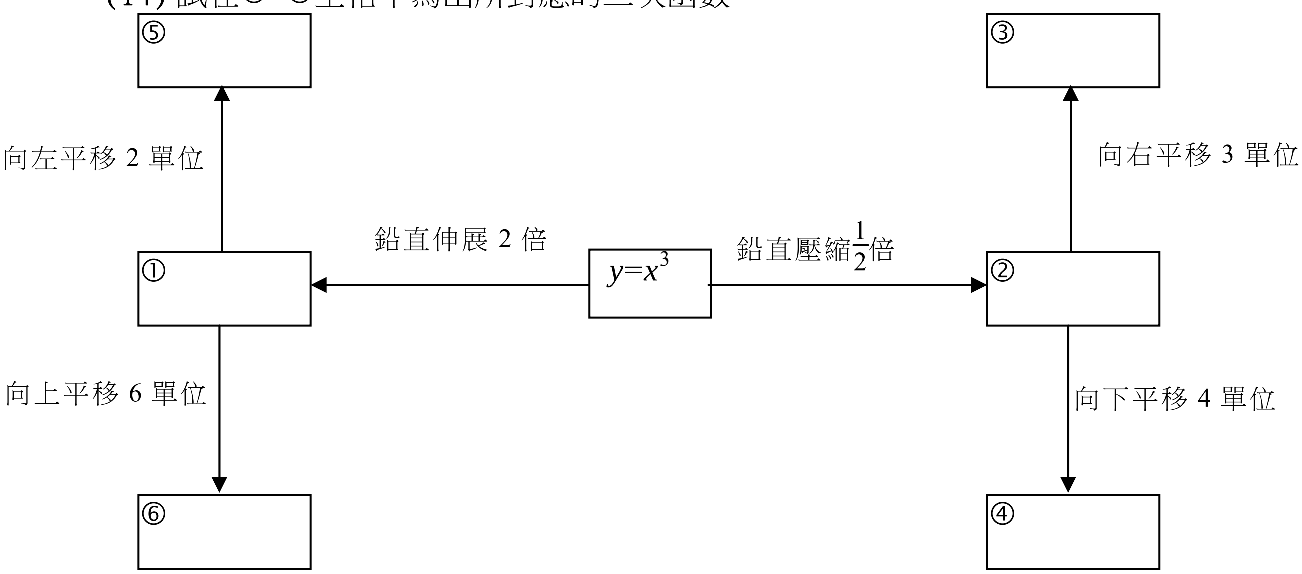
(12) 如圖所示，正方形 ABCD 的邊長為 1，

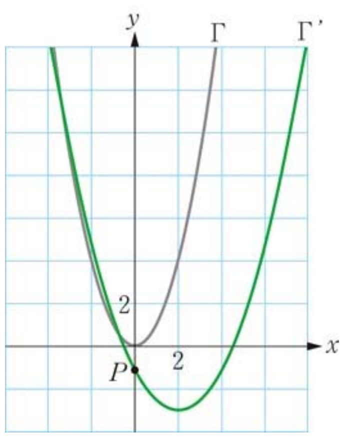
若動點 M,N,P 分別在$\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{CD}$邊上，

且$\overline{AM}=\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{CP}$，求△MNP 面積的最小值。

(13) 如圖，二次函數 $y=2x^2-x-3$ 的圖形在直線 $y=3x+k$ 的上方，試求 k 的範圍。

(14) 試在①~⑥空格中寫出所對應的三次函數：



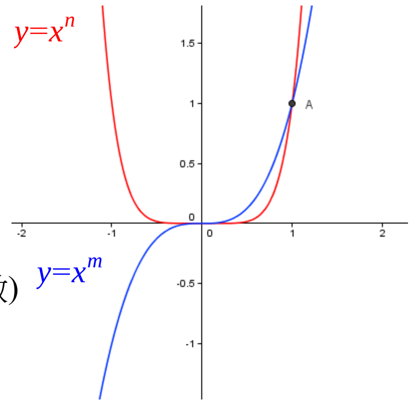


(15) 已知函數 $y=x^2$ 的圖形 Γ 如右圖，將 Γ 先沿 y 軸壓縮$\frac{1}{2}$倍，再向右平移 2 單位，續向

下平移 3 單位後得到Γ′ 的圖形，而Γ′ 所
對應的二次函數為 $y=f(x)$。試求 $f(x)$，
並求出Γ′ 中的 P 點坐標。

(16) 設 $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2$
(計 5 項完全平方)。試求 $f(x)$ 的最小值及對應的 x 值。

(17) 右圖兩個函數圖形，分別為 $f(x)=x^n$，$g(x)=x^m$ (m,n 為自然數)，下列有關圖形的特性，哪些是正確的？
(A)$f(x)$為奇函數。
(B)$g(x)$為偶函數。
(C)A 點坐標為(1,1)
(D)$m<n$
(E)$g(x)$為嚴格遞增函數



(18) 設函數 $f(x)=2(x-3)^4$ 的圖形與直線 $y=k$(k 為正數)有兩個交點 A,B，試求 A,B 兩點的 x 坐標和。

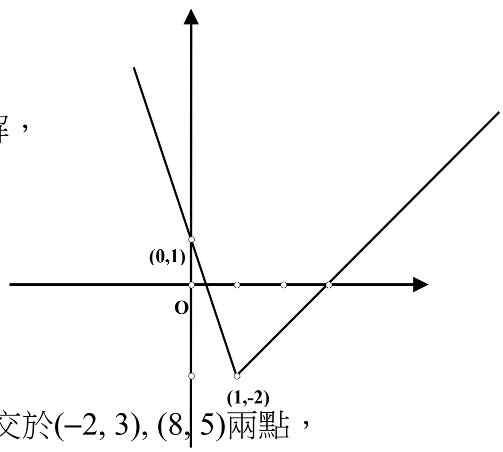
(19) 請問下列哪些是奇函數？(多選)
(A) $f(x)=x^3+x+1$　(B) $f(x)=x^5+x^3-2x$　(C) $f(x)=x+3$
(D) $f(x)=x^3-2x$　(E) $f(x)=4$

(20) 請問下列哪些是偶函數？(多選)
(A) $f(x)=x^4-x^2+1$　(B) $f(x)=x^5+x^3-2x$　(C) $f(x)=x^2+3$
(D) $f(x)=x^3-2x^2$　(E) $f(x)=6$

進階問題

(21) 設 $f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，在 $x=3$ 時 $f(x)$有最大值 8，則數對(a,b)=__________。

(22) (a)作出 $y=x|x-2|$的圖形。
(b)設 a 為實數，若 $x|x-2|=a$ 恰有一個實數解，求 a 的範圍。



(23) $f(x)=ax+b+c|x+d|$，a,b,c,d 為實數，
而 $y=f(x)$的圖形如右，求 $a+b+c+d=$？

(24) $f(x)=|x-a|+b$ 和 $g(x)=-|x-c|+d$ 的圖形相交於$(-2, 3)$, $(8, 5)$兩點，
則 $a+c=$_______。

(25) 設 $f(x)=|x^2-3x|+x-2$

(a)請做出 $y=f(x)$的圖形。

(b)方程式$|x^2-3x|+x-2=k$ 有四個相異實數解，k 的範圍=？

(26) 已知定義在 R 上的奇函數 $f(x)$滿足 $f(x-4)=-f(x)$，而且在區間[0,2]上 $f(x)$是遞增函數。試求下列各小題：

(a)請說明 $f(x)$的圖形對稱直線 $x=2$。

(b)請說明 $f(x-8)=f(x)$。

綜合練習解答

(1) (a)$\frac{5}{2}x+2$(b)1998

(2) (a) $y=\frac{9}{5}x+32$ (b) $68\le y\le 77$

(3) (a) 157.34 (公分) (b) 153.98 (公分)

(4) (a) $A\,(-2，0)$ (b) $f(x)=-2x^2-4x$ (c) $-2<x<0$ 時，$y>0$

(5) (A)(C)(E)

[解法]：

觀察右圖，可設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 與 x 軸相切於 A(α,0)

(A)因開口向下$\Rightarrow a<0$……(○)

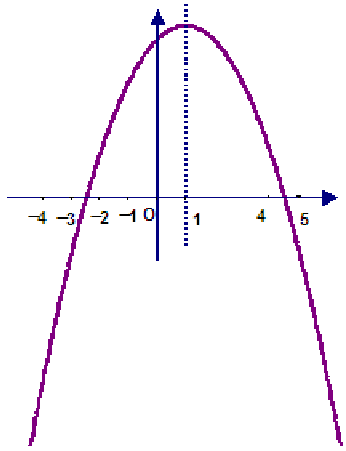
(B)$\alpha=-\frac{b}{2a}$可正亦可負 $\Rightarrow b$ 可能大於 0 亦可能小於 0

(C)因圖形過(0,−1)，將其代入可求得 $c=-1$……(○)

(D)因圖形與 x 軸相切 $\Rightarrow b^2-4ac=0$

(E) $a+b+c=f(1)$，而圖形與 $x=1$ 之交點

必在第四象限或 x 軸上 $\Rightarrow a+b+c\le 0$……(○)



(6) (A)(B)(C)

[解法]：

根據題意，可以知道拋物線的對稱軸為 $x=1$ 且

點(4,f(4))在 x 軸上方，(5,f(5))在 x 軸下方

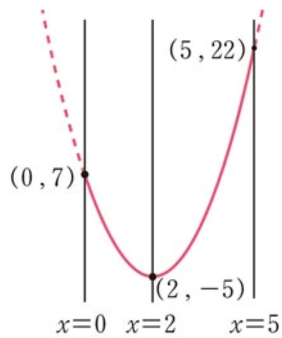
$\Rightarrow$圖形開口向下，頂點在 x 軸上方$\Rightarrow a<0$，$b>0$

因為對稱軸為 $x=1$

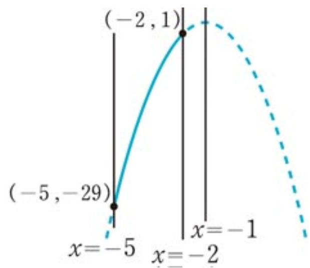
所以 $f(0)=f(2)>0$，$f(-1)=f(3)>0$，$f(-2)=f(4)>0$

$f(-3)=f(5)<0$，$f(-4)=f(6)<0$

$f(0)=a+b>0$ 故應選(A)(B)(C)



(7) (a)$g(x)=\frac{-1}{10}x^2+8x$ (b)$x=30$(千個)獲利總值最高。



(8) (a) 最大值＝22。(當 $x=5$) 最小值＝−5。(當 $x=2$)
(b) 最大值＝1。(當 $x=-2$)最小值＝−29。(當 $x=-5$)

(9) $k>-3$

(10) (a)略 (b) ①向右 3 單位② 向左平移 2 單位，向上平移 3 單位

(11) 最大值 6，最小值−19

(12) $\frac{1}{3}$ [提示：可以令$\overline{AM}=\overline{BN}=x$，$0\le x\le 1$，再將△MNP 面積表示成 x 的二次函數，

再求其最小值。]

(13) $k<-5$

(14) ①：$y=2x^3$ ②：$y=\frac{1}{2}x^3$ ③：$y=\frac{1}{2}(x-3)^3$ ④：$y=\frac{1}{2}x^3-4$ ⑤：$y=2(x+2)^3$ ⑥：$y=2x^3+6$

(15) $P(0，-1)$

(16) 當 $x=\dfrac{1+2+\cdots+5}{5}=3$ 時，$f(3)=10$ 最小。

(17) (C)(D)(E)

(18) 6

(19) (B)(D)

(20) (A)(C)(E)。

(21) $(-1,6)$

(22) (a)略 (b)$a>1$ 或 $a<0$

[解法]：

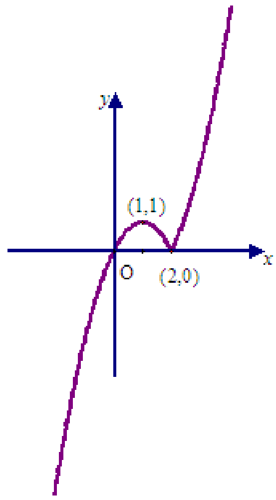
(a) 當 $x\geq2$ 時，$f(x)=x^2-2x$

；當 $x\leq2$ 時，$f(x)=-x^2+2x$

(b)考慮 $y=f(x)=x|x-2|$與 $y=a$ 兩個圖形的交點，

若有一個交點，則方程式 $x|x-2|=a$ 有一個實數解

$\Rightarrow a>1$ 或 $a<0$



(23) -1[提示：轉折點$(-1,0)\Rightarrow d=-1\Rightarrow f(x)=ax+b+c|x+1|$

$x\geq1\Rightarrow f(x)=ax+b+c(x-1)$；$x\leq1\Rightarrow f(x)=ax+b+c(1-x)$]

(24) 6

(25) (b)$1<k<2$ [(a)畫圖時考慮 $x\geq3$ 或 $x\leq0$ 與 $0\leq x\leq3$ 兩種情形(b)考慮 $y=k$ 與 $y=f(x)=|x^2-3x|+x-2$ 的交點]

(26) (a)根據題目的條件，可以得知 $f(x-4)=-f(x)=f(-x)$，$(x,f(x))$在圖形上，對 $x=2$ 的對稱點為$(4-x,f(x))$，$f(4-x)=-f(x-4)=f(x)$，所以 $f(x)$對稱於直線 $x=2$。

(b)$f(x-8)=-f(x-4)=f(x)$。所以 $f(x)$是以 8 為週期的函數。