普通高級中學必修科目「數學」課程綱要

中華民國 97 年 1 月 24 日台中（一）字第 0970011604B 號令發布

壹、課程目標

普通高級中學必修科目「數學」課程欲達成的目標如下：

一、培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
二、培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。
三、培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

貳、核心能力

一、演算能力：能熟練多項式、分式、根式、指對數、三角的運算及估算。
二、抽象化能力：能將具體世界中的概念以數學形式表徵。
三、推理能力：能認識證明，並進行推論。
四、連結能力：能整合數學內部知識並與具體世界連結。
五、解題能力：能解決數學形式與生活情境中的數學問題。
六、溝通能力：能正確、流暢地利用口語或文字表達解題想法。
七、使用計算工具的能力：能使用計算器來處理繁瑣的計算與解決較複雜的問題。

參、時間分配

第一、二學年每學期四學分，每週授課四節。

肆、教材綱要

普通高級中學必修科目「數學」課程分為數學 I、II、III、IV，各四學分。

一、各學年課程的定位如下：

高一數學（數學 I、II）的定位為學習與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析時所需要的基礎。高一上處理有關連續量的課題，包括由度量連續量所產生的實數，以及描述量與量關係的基本函數，如多項式函數與指數、對數函數。高一下處理有關離散量的課題，包括數列與級數、排列組合、生活中常見的古典機率，以及其他學科常用到的數據分析等。

高二數學（數學 III、IV）的定位為社會組與自然組學生在學習上所應具備的數學知識，其主題為坐標、向量幾何與線性代數。

二、教材綱要包括主題、子題、內容、備註。備註欄表列學習規範及全國性評量不應測試的內容。有關綱要內容的說明與範例則置於附錄。

三、課程分版：高二數學分為 A、B 兩版，B 版的內容包含 A 版，所增加的題材以加註◎號區隔。

第一學年：數學 I（函數）、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、數與式	1.數與數線	1.1 數線上的有理點及其十進位表示法 1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係 1.3 乘法公式、分式與根式的運算	1.2 不含非十進位的表示法
	2.數線上的幾何	2.1 數線上的兩點距離與分點公式 2.2 含絕對值的一次方程式與不等式	
二、多項式函數	1.簡單多項式函數及其圖形	1.1 一次函數 1.2 二次函數 1.3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移	1.3 僅介紹 4 次（含）以下的單項函數
	2.多項式的運算與應用	2.1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用、插值多項式函數及其應用	2.1 不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次
	3.多項式方程式	3.1 二次方程式的根與複數系 3.2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$ 的意義 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理	3.1 不含複數的幾何意涵
	4.多項式函數的圖形與多項式不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含複雜的分式不等式
三、指數、對數函數	1.指數	1.1 指數為整數、分數與實數的指數定律	
	2.指數函數	2.1 介紹指數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性）	
	3.對數	3.1 對數的定義與對數定律 3.2 換底公式	3.2 換底公式不宜牽涉太過技巧性與不實用的問題
	4.對數函數	4.1 介紹對數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性）	
	5.指數與對數的應用	5.1 對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號 5.2 處理乘除與次方問題 5.3 等比數列與等比級數 5.4 由生活中所引發的指數、對數方程式與不等式的應用問題	5.1 不含表尾差
附錄	認識定理的敘述與證明	介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法（含 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明）	

數學 II（有限數學）、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、數列與級數	1.數列	1.1 發現數列的規律性 1.2 數學歸納法	1.1 只談實數數列、不含二階遞迴關係 1.2 不等式型式的數學歸納法置於數學甲/乙 I 數列與極限中討論
	2.級數	2.1 介紹 Σ 符號及其基本操作	
二、排列、組合	1.邏輯、集合與計數原理	1.1 簡單的邏輯概念：介紹「或」、「且」、「否定」及笛摩根定律 1.2 集合的定義、集合的表示法與操作 1.3 基本計數原理（含窮舉法、樹狀圖、一一對應原理） 1.4 加法原理、乘法原理、取捨原理	
	2.排列與組合	2.1 直線排列、重複排列 2.2 組合、重複組合	2.1 不含環狀排列 本章節要避免情境不合常理、過深、或同時涉及太多觀念的題型
	3.二項式定理	3.1 以組合概念導出二項式定理、巴斯卡三角形	3.1 不含超過二項的展開式
三、機率	1.樣本空間與事件	1.1 樣本空間與事件	
	2.機率的定義與性質	2.1 古典機率的定義與性質	2.1 不含幾何機率
	3.條件機率與貝氏定理	3.1 條件機率、貝氏定理、獨立事件	
四、數據分析	1.一維數據分析	1.1 平均數、標準差、數據標準化	1.1 只談母體數據分析，不涉及抽樣，可用計算工具操作
	2.二維數據分析	2.1 散佈圖、相關係數、最小平方法	2.1 可用計算工具操作。最小平方法的證明置於附錄
附錄	1.演算法	輾轉相除法、二分逼近法	
	2.最小平方法	最小平方法的證明	

教學說明

數學 I ：函數

數學 I 處理連續量相關的課題，包括度量連續量的實數，以及表現兩連續量關係的函數，函數也是數學與具體世界連結的媒介。近年來，由於許多學科的數量化與數學化的需求，使得各國的高中數學教育特別重視函數及其應用，在先進國家，學生除用描點繪圖外，還用電腦繪圖輔助函數的學習，以建立其函數與圖形的直觀連結。本次課綱修訂，也加強函數這個主題。在高一階段，學生要學習基本函數（多項式函數、指數、對數函數）的基本操作，認識其基本特徵與圖形以及基本的應用。因為其他學科普遍用到一次函數、二次函數，以及指數、對數函數，更應特別加強這些題材的學習。

一、數與式

實數是度量連續量的符號。在第一章的「數與式」中，學習目標為建構直尺，也就是要學習實數的十進位表示法，以及處理數線上的幾何問題。

首先複習有理數系並延伸介紹循環小數，但此處僅需初步介紹循環小數為有理數，證明則留待極限的章節討論。藉由有理數的十進位表示法，導入介紹數線上實數的十進位表示法，即無限小數。此處僅需建立實數可由有限小數逼近的直觀，不需涉及實數的完備性觀念。至於 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明，則置於附錄。在數的學習中，要循序漸進地引領學生學習以文字替代具體數字的形式操作，包括展開、分解與化簡，以與國中的經驗連結，並作為學習函數的基礎。

其次由數線上的方程式複習變數的觀念，處理數線上的幾何問題，包括分點公式，以及與距離相關的方程式與不等式問題。

1.數與數線

1.1 數線上的有理點及其十進位的表示法

透過有理數的相除意涵，讓學生發現有理數可以用有限小數或循環小數來表示，此處讓學生操作分母為一位數的有理數即可。循環小數為有理數的證明，留待極限章節處理，此處僅需初步介紹。要告知學生一個實數為有理數的充分必要條件為該數的十進位表示法是有限小數或循環小數。

1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係

實數與數線上的點有一一對應的關係，透過不斷作十等分的細分，直觀介紹實數可用有限或無限小數表示，並建立實數可用有限小數逼近的直觀。實數的操作包括絕對值、根數操作與實數大小的比較。

- $\sqrt{2}$ 可表為無限小數。
- 絕對值的定義。
- 複習根式的運算與化簡：如 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ 、 $\sqrt{a^2}=|a|$ 、算幾不等式 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ 。
- 數的大小比較。

1.3 乘法公式、分式與根式的運算

對文字符號所組成的代數式能進行展開、分解及化簡等形式運算。乘法公式及其逆運算（如：立方和、立方差），此處不要延伸為複雜的因式分解。

- 型如 $(a+b)^3$ 、 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 、 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 、 $(a+b+c)^2$ 、 $(1-x)(1+x+x^2)$ 的展開式與逆運算，但不宜過度延伸。
- 不含雙十字交乘法如 $(x+y-1)(x-y+2)$ 的因式分解。
- 不宜的公式： $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ 。
- 能化簡繁分式與根式，如：

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\dfrac{2ab}{a+b}$ 、 $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}}=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 、 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 、

$\sqrt{x^2+x^{-2}+2}=x+x^{-1}$ 。

2.數線上的幾何

2.1 數線上兩點距離與分點公式

例如能算出介於 a,b 之間且與 a,b 距離的比為 2:3 的點 x 。

2.2 含絕對值的一次方程式與不等式

- 三角不等式：$|a+b|\le|a|+|b|$ 。
- $|x-3|<2$ 且 $|x-1|<1$ 的解的範圍為 $1<x<2$ 。
- 求 $|x-1|<|2x-3|$ 的解的範圍。

二、多項式函數

本章的重點是簡單多項式與多項式的除法。在第二章「多項式函數」裡，首先複習函數的概念以及一次與二次函數，作為與國中課程的銜接，並作適度延伸，強調函數的特徵、圖形與應用的連結。一次、二次函數是最基本的函數，要加強學習。在一次函數裡，學生要理解變化率的物理意涵，以及斜率的幾何意涵。在二次函數裡，學生要複習與延伸學習配方法、平移、極值、判別式和正定性（恆正性），能繪圖並能應用。在單項函數 $y=cx^n$（n=1、2、3、4）中，學生要能繪圖、瞭解函數的奇偶性、單調性，並作函數圖形的平移。簡單多項式函數是本章的基礎，學生應該要熟練。

在一般多項式的應用中有兩個課題，一是多項式的求值，一是插值多項式。原則上多項式可以透過四則運算求值，也因為如此，多項式被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值。另外，多項式也被用來作為插值的工具。插值方法很重要，它用少量的數據表現連續型的資訊，展現數學的效率與精確性。

除法是處理多項式的核心方法。一般多項式透過與低次多項式的相比（即相除），可得出多項式的不同表現，並可用來求值。此處低次多項式是指型如 $(x-a)$、$(x-a)(x-b)$、x^2+1、x^2+x+1 的一次與二次多項式。比如將多項式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$，餘式可得 $f(a)$；連續除以 $(x-a)$ 可得 $f(x)$ 的 $(x-a)$ 冪方展開式，它可用來求 $f(x)$ 在 a 附近的近似值。又如將 $f(x)$ 分別除以 $(x-a)$，$(x-b)$，得餘式 α，β，可用來表現通過 (a,α)，(b,β) 的插值多項式，此插值多項式即為 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式，此為數學化繁為簡的精神。在多項式方程式的除法課題裡，具體多項式的次數仍不宜超過五次，重點是學會除法的操作與化繁為簡的精神。餘式定理與因式定理是除法原理的推論。因式定理可用來証明插值多項式的唯一性。學生學到不超過三次的插值多項式即可，以避免繁瑣的計算。

多項式方程式的課題是求多項式的根。首先處理二次方程式的求根問題，包括判別式、根的公式解、根與係數關係，以及它們的應用。在二次方程式的複數根裡，介紹複數系，包括複數的四則運算、共軛複數，以及二次方程式的共軛複數根（虛根成對）。但由於複數平面以及複數的幾何意涵需要較成熟的數學素養，故此處暫不涉及，而留待高三選修數學甲 I 的三角函數章節再處理。二次以上的整係數多項式方程式可用簡單的因式分解（如平方差、立方和、立方差）或牛頓定理求其有理根。但此部份的多項式不宜太高次，首尾項的係數也不宜有太多因數，以避免繁複的操作；此段內容應避免學生誤會整係數多項式方程式的根都是有理數。一般多項式求實根的主要辦法是勘根定理，此處重點是以求 n 次方（實）根，以及低次多項式方程式的實根為主，前者是學習指數函數的先備知識。最後談一般實係數多項式的虛根成對定理，並介紹一般實係數多項式可分解為一次式與二次式乘積的代數基本定理。

多項式函數的圖形與多項式不等式的重點，主要是讓學生辨識到已分解的多項式函數的圖形特徵（包括零根位置、重根的意涵、函數值的正負），其中零根的位置與單項函數圖形的

平移作連結，重根的意涵與單項函數的圖形作連結，函數值的正負與二次式的恆正性作連結。讓學生建立函數圖形與函數特徵的關聯是函數學習的重要內涵。函數圖形可在書上呈現，或以電腦繪圖展示。

1.簡單多項式函數及其圖形

1.1 一次函數：變化率（應用意涵，如速度）、斜率（幾何意涵）

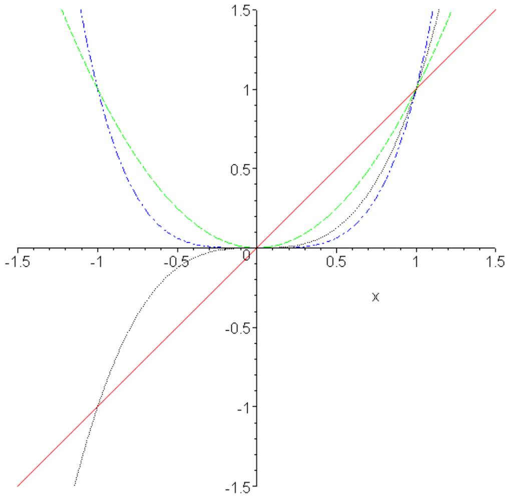
- 介紹函數 $y=f(x)$ 的符號及函數圖形。
- $y=mx+b=m(x-x_0)$ 中 m,x_0,b 的幾何意涵，其中 m 在幾何上的意涵為斜率，在應用上的意涵表示 y 對 x 的變化率。

1.2 二次函數：配方法、圖形、極值、判別式、正定性（恆正性）、應用實例

- 極值問題的應用，例如： $f(x)=x^2+2x+3,-2\le x\le 2$ 的極值。
- 正定性：所謂二次式的正定性是指其函數值的恆正性，譬如判斷 x^2-x+4 恆為正。
- 能繪出各種不同型式的二次函數的圖形，如 $y=c(x-a)(x-b)$、 $y=ax^2+bx+c$ 、 $y=a(x-h)^2+k$ ，並能進行二次函數不同型式的轉換。

1.3 單項函數的奇偶性、單調性和圖形的平移

- 瞭解函數 $y=x^n$ ， $n=1,2,3,4$ 在 $[-1.5,1.5]$ 的圖形。



- 當 n 為正整數時，型如 $y=cx^n$ 函數的奇偶性與單調性。
- 瞭解 c 的正負、大小與函數 $y=cx^n$ 圖形的關係。
- 利用平移畫出型如 $y=c(x-h)^n+k$ 的圖形，但不涉及二項式展開的逆運算。

2.多項式的運算與應用

2.1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用（含多項式函數的求值）

- $(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}\right)=x^n-a^n$ ，$n=2,3,4$。
- $(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$ 。
- 除法中的除式不宜太高次，以一次式和二次式為主。
- 透過連續的多項式綜合除法，求 $f(x)=2x^3-5x^2+6x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$ 中的 a,b,c,d 與求 $f(1.01)$ 的二位小數近似值。
- 求 $f(x)=2x^3-5x^2+6x+3=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$ 中的 a,b,c,d 。
- $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式為通過 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的插值多項式。

- 若 f 有 a,b 兩實根，則 f 可寫成 $f(x)=q(x)(x-a)(x-b)$ 的型式。
- 透過因式定理證明插值多項式的唯一性。
- 設通過 $(1,1),(2,3),(3,7)$ 的多項式為 $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$，求 a,b,c 及 $f\left(\frac{1}{2}\right)$。

- 插值多項式：通過$(11,3),(12,5),(13,8)$的多項式可表示為
  $f(x)=3\times\frac{(x-12)(x-13)}{(11-12)(11-13)}+5\times\frac{(x-11)(x-13)}{(12-11)(12-13)}+8\times\frac{(x-11)(x-12)}{(13-11)(13-12)}$，求$f(11.5)$的值。
- 此處暫不處理下面的題型：「設通過$(1,1),(2,3),(3,7)$的多項式為$f(x)=a+bx+cx^2$，求a,b,c。」此類題型將在數學 IV 的聯立方程組章節中處理。

3.多項式方程式

3.1 二次方程式的根與複數系（含複數根與複數的四則運算）

　　二次方程式的根包括判別式、公式解、根與係數關係及簡易分式方程式；複數系包括複數的引進（不引進複數平面與複數的幾何意涵，如：絕對值）、複數的四則運算，以及共軛複數。

- 複習$ax^2+bx+c=0$的公式解，含複數根。
- 根與係數關係：
  設$x^2+5x+3=0$的二根為α與β，求$\alpha^2+\beta^2$、$\alpha^3+\beta^3$。
- 簡易分式方程式（通分展開後為二次方程式），如：$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$。

3.2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$的意義

　　本節談論的是一般實係數的多項式，整係數多項式的因式分解不必太過強調，以免學生誤會整係數多項式的根都是有理根。

- 有理根判定法：首尾項係數不宜有太多因數，以免過於繁複的運算。
- 勘根定理：$x^n=a$的求實數解，其中a>0、求$f(x)=x^3+2x^2+3x+4$的實根。
- 正n次方根的存在唯一性證明。

3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理

- 證明虛根成對定理，並讓學生知道實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積的事實：$f(x)=k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k}(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{s_m}$ 其中二次式不可分解。
- 利用除法求$f(x)=5x^4-21x^3+30x^2-9x+7$在$x=2+i$的值。

4.多項式函數的圖形與多項式不等式

4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題

　　只談低次或已分解的多項式不等式問題，並能辨識函數圖形特徵（根的位置、重根、函數值正負的區間），但重根不宜超過三次，儘量多透過教科書的呈現或電腦繪圖協助學生建立圖形與函數的連結。此處不需延伸到複雜的分式不等式的問題。

- $(x-1)(x+2)^2(x-4)>0$、$(x-1)(x-2)^3(x^2+x+1)>0$。
- $x^3-1>0$、$x^4-2x^2-3>0$。
- 簡易分式不等式：$\frac{1}{x}<0$、$\frac{1}{x-1}<1$、$\left|\frac{1}{x}\right|<1$。

三、指數、對數函數

　　本章的重點為指數定律、對數定律及其應用。指數定律的學習由指數為整數、分數到實數，以數字、文字方式循序漸進，讓學生熟悉指數定律，並透過計算器的操作，建立$10^x, x=0.1,0.2,\cdots,0.9$的數字感，並輔以生活上的實例。指數為實數的定義不必嚴格，直觀上僅需利用指數為有理數去逼近即可。

　　要介紹指數函數（底數$a>0, a\neq1$）的圖形與性質，包括：值域、單調性（嚴格遞增、嚴格遞減）與凹凸性，這裡凹凸性僅做割弦在函數圖形上方的直觀介紹即可。主要的指數函數為2^x及10^x。

對數的內容包括：$x=\log_a b$ 的定義是 $a^x=b$、對數定律以及換底公式。換底公式是將一般底換成 10 為底，以配合後面對數表的使用。傳統上換底公式的題材常製造出許多難題，並無實用的意義，這類題材應予刪除。對數定律是處理指數方程式的核心方法。對數定律包括 $\log(xy)=\log x+\log y$、$\log(x/y)=\log x-\log y$ 與 $\log(x^{\alpha})=\alpha\log x$。它將乘除問題化簡為加減問題，次方問題化簡為乘除問題。在介紹對數定律時，不要列出太多衍生的公式，以免打亂了上述化簡的核心思想。

對數函數要介紹對數函數的定義域、值域、單調性以及凹凸性，其中凹凸性僅作割弦在函數圖形下方的直觀介紹即可。關於一般底的對數函數，可透過換底公式換為以 10 為底的對數函數 $\log_a x=\dfrac{1}{\log a}\log x$，也就是一般底的對數函數只是 $y=\log x$ 在 Y 軸上的伸縮，故對數函數主要介紹 $y=\log x$ 為主。

指數、對數的應用包括：學習對數表、認識科學記號、利用對數表處理大、小數的乘除與次方問題、等比數列與級數、一般算幾不等式，以及處理指數方程式、指數不等式的應用問題。生活周遭與自然界中有許多呈指數成長或衰退的現象，如人口成長、細胞分裂、放射性元素衰變、藥物代謝、複利等，或以指數方式度量的音量、音階、地震強度、酸鹼值等。透過這些實例引領學生學習以指數方程式或不等式建立數學模型。純人工化指對數方程式與指對數不等式問題則不宜過度延伸。

1.指數

1.1 指數為整數、分數與實數的指數定律

- n 次根數的操作：$10^{\frac{1}{2}}\cdot 10^{\frac{1}{3}}=10^{\frac{5}{6}}$，$2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{3}}$。
- 指數為分數的指數函數的單調性，$10^{\frac{1}{3}}<10^{\frac{1}{2}}$。
- 指數化簡不宜太過複雜或太人工化，下列題型不適宜：

  化簡 $(x^{\frac{a}{a-b}})^{\frac{1}{c-a}}\cdot(x^{\frac{b}{b-c}})^{\frac{1}{a-b}}\cdot(x^{\frac{c}{c-a}})^{\frac{1}{b-c}}$；

  若 $a^{2x}=2+\sqrt{3}$，求 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}+\sqrt{6}}$ 的值。
- 指數為實數的定義不必嚴格，直觀上僅需利用指數為有理數去逼近即可。

2.指數函數

2.1 介紹指數函數圖形與性質（含單調性、凹凸性）

這裡凹凸性僅做割弦在函數圖形上方的直觀介紹即可。主要的指數函數為 2^x 及 10^x 。

3.對數

3.1 對數的定義與對數定律

- 對數定律僅介紹： $\log(xy)=\log x+\log y$ ， $\log(x/y)=\log x-\log y$ ， $\log(x^\alpha)=\alpha\log x$ 。不要列出太多衍生的公式，如 $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b, (\log_a b)(\log_b c)=\log_a c, a^{\log_x b}=b^{\log_x a}$ 。

3.2 換底公式： $\log_a x=\dfrac{1}{\log a}\log x$

換底公式是換成 10 為底的對數為主，以配合後面對數表的使用。傳統上換底公式常製造出許多難題，並無實用的價值，這類題材應予刪除。

4.對數函數

4.1 介紹對數函數圖形與性質（含定義域、對數定律、單調性、凹凸性）

- 此處凹凸性僅作割弦在函數圖形下方的直觀介紹即可。
- $y=a^x$ 等價於 $x=\log_a y$ 。
- $\log_a x=\dfrac{1}{\alpha}\log x$ ， $\alpha=\log a$ ，也就是對數函數的換底是在值域上的伸縮。
- 算幾不等式

算幾不等式 $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$ 等價於 $\dfrac{\log a+\log b}{2}\le\log\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ ，等式成立於 $a=b$

此處的算幾不等式等價於對數函數的凹凸性，僅作直觀介紹，不用嚴格證明。

5.指數與對數的應用

5.1 對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號

表尾差與內插法的概念相同，但內差法的適用範圍廣泛，故刪除表尾差的內容以內插法取代。

5.2 處理乘除與次方問題、算幾不等式

- 處理乘除與次方問題，如： 2^{100} 為幾位數？ $(1.18)^{10}$ 約為多少（有效數字小數點以下兩位）？

5.3 等比數列與等比級數

- 簡單介紹等比數列、等比級數，不含無窮等比級數。

5.4 由生活中所引發的指數、對數方程式與不等式的應用問題，如：複利、人口成長、細胞分裂、放射元素衰變、藥物代謝、貸款等問題。純人工化指數方程式與指數不等式問題則不宜過度延伸。

數學 II：有限數學

數學II處理與離散量相關的有限數學問題。二十世紀計算機的發明，提供人類處理大量數據的工具，促使許多學門進行數量化與數學化的革命。有限數學包括離散數學（數列與級數、排列組合）、離散的古典機率論，以及基本的數據分析，這些都是各學科進行量化分析所需的基本工具。雖然有限數學的課題仍是古典的內容，但因應時代的發展，應有新的視角，特別是它在計算機科學與統計科學方面新的應用，並避免操練傳統的人工化難題以及繁瑣的計算。

一、數列與級數

本章節作為有限數學的先備知識，主要是讓學生發現數列的規律性，歸納成公式，並用數學歸納法加以證明。核心的公式為一階線性遞迴關係。至於一階遞迴不等式是屬於分析方面題材，留待數學甲/乙Ⅱ的極限章節中處理。級數部分包括基本的求和公式與Σ符號的操作。

1.數列

1.1 發現數列的規律性

- 一階遞迴關係：由具體實例讓學生由前數項推測下一項，並歸納出遞迴關係，如 $a_{n+1}=a_n+d$ 、 $a_{n+1}=ra_n$ 、 $a_{n+1}=a_n+n$ 、 $a_{n+1}=a_n+n^2$ 、 $a_{n+1}=\left(n+1\right)a_n$ 。

1.2 數學歸納法：以驗證前述所發現的數列規律為主，含不等式的數學歸納法將在數學甲/乙II 的「數列及其極限」章節中討論。

2.級數

2.1 介紹Σ符號及其基本操作

- 展開式與Σ型式的互換。
- Σ的性質： $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ ， $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ 。
- 換指標 $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=2}^{n+1}a_{k-1}$ ，以一個 $\sum$ 為限。
- 歸納出基本求和公式： $\sum_{k=1}^{n}k$ 、 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 、 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)}$ 的公式，並用數學歸納法證明。

二、排列、組合

「排列組合」的定位為處理生活中常見的計數問題，並作為學習古典機率的準備。排列組合以及計數的問題，最基本的公式通常並不複雜，學生學習的困難常在於無法把文字敘述的題目，適當地「翻譯」與「對應」到該用的公式。學習翻譯與對應的同時，也應該強調分辨「計數對象是什麼」的重要性，也就是要分清楚「什麼跟什麼是不同的物件」。這種將語文轉化為數學的題材，應在教材中詳細闡述，同時教師於課堂上也需按部就班引導學生，並讓學生多做閱讀練習，以建立學生在此方面的轉化能力。

過去在「排列組合」的教學上，常有許多刁鑽古怪的難題，有些題型的情境不合常理，有些是大學才需要學習，有些則是用到太多觀念（如「環狀排列」等），這類難題都應避免，以免降低了學習效率。學生應該只需掌握下列範例中的基本題型即可。

1.邏輯、集合與計數原理

1.1 簡單的邏輯概念：介紹「或」、「且」、「否定」及笛摩根定律。

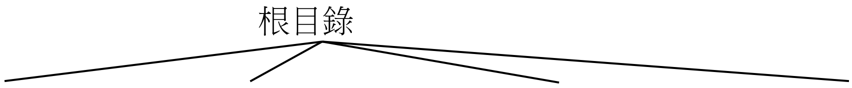
1.2 集合的定義、集合的表示法與操作

聯集、交集、補集、差集、乘積集合與文氏圖。

1.3 基本計數原理（含窮舉法，樹狀圖、一一對應原理）

集合元素的計數（應介紹符號 $|S|$，用以表示一個集合 S 的元素個數）。原始的計數仍然出自窮舉法，但可使用樹狀圖幫助組織資料，以達成計數目的。

- 電腦裡的檔案通常依照樹狀結構組織起來，例如（括弧中數字表示檔案個數）：



文件檔　　　　課業檔　　　　　圖畫檔　　　　遊戲檔

函件	文章	數學	理化	英文	圖片	動畫	電影	益智	動作
（10）	（8）	（3）	（5）	（7）	（21）	（4）	（1）	（3）	（6）

所以總共有 10+8+3+5+7+21+4+1+3+6 = 68 個檔案。

• 一一對應原理：在兩集合之間如果能建立一一對應，則兩集合的元素個數相等。例如有 51 個人參加網球單淘汰賽，就是說任何一位選手只要輸一場，就被淘汰出局。並且每一場比賽都一定有一位得勝，不允許有和局。在每一輪比賽中，將選手盡可能地配對相比。如果有奇數位選手，則暫時剩下一位。只要比賽進行足夠多次，最後就會有一位冠軍出現。請問總共要比賽幾場，才能產生冠軍？因為 51 不算是太大的數目，當然可以使用直接安排比賽程序得出答案。但是更能看出問題核心的辦法，是觀察出下面的一一對應。因為每一場比賽會產生唯一的失敗者，而且每位選手如果會失敗，也只會失敗一次，所以比賽的場次與失敗者之間有一個一一對應，也就是說比賽場數等於失敗者人數。因為最後只有冠軍一個人從來不曾失敗，所以一共剛好比賽 50 場。

1.4 加法原理、乘法原理、取捨原理

• 加法原理：假設 A 與 B 是不相交的有限集合，則 $|A \cup B| = |A| + |B|$。

• 介紹 A, B 為兩集合時，乘積集合 $A \times B$ 的定義和乘法原理：$|A \times B| = |A|\cdot|B|$。

• 取捨原理只考慮最多三個集合間的取捨，令 A, B, C 為三個有限集合，則

（1） $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

（2） $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$。

另外可用文氏圖說明取捨原理。

經常看到把 Principle of Inclusion and Exclusion （PIE） 翻譯為「排容原理」，或「容斥原理」。但中文裡原來沒有「排容」或「容斥」這類習慣說法，且這些名詞無法明確表達這個數學概念的真正意涵。一般我們只有在傳統習慣的文辭中沒有恰當翻譯法時，才去生造或杜撰新名詞。其實 Inclusion and Exclusion 就是在做「取捨」，因此把 PIE 翻譯為「取捨原理」較為恰當。

2.排列與組合

2.1 直線排列、重複排列

直線排列：

• n 個相異物件的排列數為階乘數 $n!$。
（球與籃子模式：把編號是 1 到 n 的球，放入編號是 1 到 n 的籃子裡，每個籃子恰放一個球，放法總數為階乘數 $n!$。）

• 從 n 個元素的集合中，每次取出 k 個相異元素做排列，則總數為排列數 $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$。
（球與籃子模式：把編號是 1 到 k 的球，放入編號是 1 到 n 的籃子裡，每個籃子最多放一個球，放法總數為排列數 P_k^n。）

• 班上有 50 人，要選正、副班長各 1 人，共有多少種選法？
重複排列：重複排列可看做是乘法原理的推廣。

• 從 n 個元素的集合中，每次取出 k 個元素做排列，允許重複取出同樣的元素，則總數為 n^k。
（球與籃子模式：把編號是 1 到 k 的球，放入編號是 1 到 n 的籃子裡，每個籃子裡的球數沒有限制，放法總數為 n^k。）

• 三排組合號碼鎖，每排有 10 個數字，共有10^3種組合。

• 投銅板，出現正面記為 1，出現反面記為 0。若令集合 A={0,1}，則投 n 次所有可能結果的集合為 $A^n = A \times A \times . . . \times A$（共乘 n 次），其元素個數為 2^n。

2.2 組合、重複組合

組合：由組合數的基本公式 $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ，經簡單計算得出的式子，儘量賦予選取物件式的組合解釋。

- 從 n 個元素的集合中每次取出 k 個相異元素，不同取法的總數是組合數 $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 。
- 球與籃子模式：把 k 個沒有編號且不可分辨差異的球，放入編號是 1 到 n 的籃子裡，每個籃子最多放一個球，放法總數為組合數 C_k^n 。

重複組合：

- 從 n 個元素的集合中每次取出 k 個元素，允許重複取出同樣的元素，則不同取法的總數為重複組合數 C_k^{n+k-1} 。
- 球與籃子模式：把 k 個沒有編號且不可分辨差異的球，放入編號是 1 到 n 的籃子裡，每個籃子裡的球數沒有限制，放法總數為重複組合數 C_k^{n+k-1} 。
- 對於給定的 n 與 k，方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解總數也是重複組合數 C_k^{n+k-1} 。

3.二項式定理

二項式展開為二項分布的基礎，而二項分布為機率統計的一個核心概念。

3.1 以組合概念導出二項式定理、巴斯卡三角形

- 二項式定理：利用組合的概念推導出 $(x+y)^n$ 展開式中一般項的形式，應處理生活中二項式展開的問題，不宜延伸做人工化的例題，如：求 $\left(x^2+\dfrac{1}{x}+1\right)^5$ 中 x 的係數。
- 巴斯卡三角形。
  利用二項式定理所推導的各種公式，儘量賦予「有幾種不同選法」或「有幾種不同走法」的解釋，以增加學生對於組合的直觀認識。

三、機率

1.樣本空間與事件

1.1 樣本空間與事件

藉由集合來說明幾個事件的同時發生、至少有一件發生、某事件未發生等狀況。

- 樣本空間為投銅板五次的所有可能，事件為「正面出現的次數為 3」。

2.機率的定義與性質

2.1 古典機率的定義

藉由生活中的實例，以說明機率函數要滿足的基本條件。並證明機率函數的基本性質。

- 班上有 50 人，同學間有人生日相同的機率為何？

3.條件機率與貝氏定理

3.1 條件機率、貝氏定理

- 某公司的產品分別由 A、B、C 工廠所提供，其中 A 工廠提供 40%，B 工廠提供 30%，C 工廠提供 30%，而 A 工廠的所生產的產品中有 5%的瑕疵品，B 工廠的所生產的產品中有 10%的瑕疵品、C 工廠的所生產的產品中有 8%的瑕疵品，若從該公司的產品中發現一個瑕疵品，則此瑕疵品為 A 工廠所製造的機率為何？
- 某一檢查方法對檢驗某一疾病有 90%的準確率，也就是說，如果患有該疾病的人做檢查，那麼有 90%的機會會呈現陽性反應；如果沒有該疾病的人做檢查，也有 90%的機會會呈現陰性反應。假設已知全國人口中有 2%的人得患有該疾病，如果有一人以此檢查方法的檢查結果為陽性，那麼他罹患該病的機率為何？

四、數據分析

透過平移與伸縮將數據標準化，是數據分析的一個核心方法。在教學現場，學生可利用計算器進行數據標準化，以避免繁瑣的運算。

1.一維數據分析

1.1 平均數、標準差、數據標準化（可以用計算器操作）

- 數據集中的趨勢，如：算術平均數：$\mu=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$，幾何平均數：$\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}$等。
- 數據分散的趨勢：標準差：$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\mu\right)^2\right)}$。
- 說明一元二次多項式$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x\right)^2$的最小值為$\sigma^2$，最小值發生在$x$=μ。
- $\frac{x_i-\mu}{\sigma}$稱為數據x_i的標準化。

2.二維數據分析：

2.1 散佈圖、相關係數、最小平方方法：要尋找兩量關係時，應先將兩量標準化，成為中心均在 0 點的「無因次量」後，再進行兩量關係的分析。

- $\left(\hat{x}_k, \hat{y}_k\right), k = 1, 2, \cdots, n$ 為標準化的數據，相關係數為使得 $e(r) = \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k - r\hat{x}_k\right)^2$ 為最小的 r，即 $e(r) = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i^2 - 2\hat{x}_i\hat{y}_i r + \hat{x}_i^2 r^2) = r^2 - 2(\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\hat{y}_i)r + 1$ 的最小值發生在 $r = \sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\hat{y}_i$ 。
- 迴歸直線 $\hat{y} = r\hat{x}$ 為使得 $e(r)$ 為最小的直線。
- 以實際數據和圖形操作最小平方方法，其證明置於附錄。

數學 II 附錄

演算法雖是古老的課題，但在傳統的教學中並未加以重視。近五十年來計算機的發展，使得許多演算法可以透過計算機加以實視，因而凸顯了演算法的重要性。在本節中，只談兩個古典的演算法，即整數的輾轉相除法以及求多項式實根的二分逼近法。輾轉相除法是可不經因數分解而求二整數的最大公因數，特別是可以處理大數的問題。它是人類第一個遞迴的演算法，充份展現了除法化繁為簡的精神。在教材上，可於附錄中以電腦程式語言或演算法形式語言呈現輾轉相除法。在二分逼近法中，學生應該學會迭代的思考方法，並可透過計算器實現此想法，初步認識極限逼近的歷程。因考量時數限制，故將此演算法內容置於附錄。應鼓勵學生用簡單的程式語言撰寫演算法，並在計算機上實現。

1.演算法
- 整數的輾轉相除法。
- 多項式求根的二分逼近法。

2.最小平方方法的證明