Kevin's 商用統計學　補充題目

CH8 估計與區間估計

補 8.1【特考】今由平均數 μ，變異數σ^2之母體中抽出一組隨機樣本 X_1，X_2，.....，X_n，求得樣本平均數為 $\bar{x}$ ；同時所謂的不偏推定量（unbiased estimate）定義為滿足 $E(\hat{\theta})=\theta$ 的期望值式子：

(1) 試求 $\bar{x}^2$ 之期望值。

(2) 說明 $\bar{x}^2$ 是否為 μ^2 之不偏推定量。

(3) 說明 $\bar{x}^2$ 是否為 μ^2 之漸進不偏推定量。

Ans：

(1) $E(\bar{x}^2)=Var(\bar{x})+[E(\bar{x})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$

(2) $\bar{x}^2$ 不是 μ^2 之不偏推定量，是〝偏誤估計量〞。

(3) $\bar{x}^2$ 是 μ^2 之漸進不偏推定量。

補 8.2【雲科大企研】設有兩個統計量 $\hat{\theta}_1$與 $\hat{\theta}_2$，用來估計母體參數 θ。已知 $E(\hat{\theta}_1)=2$，$E(\hat{\theta}_2)=3$， $Var(\hat{\theta}_1)=1$， $Var(\hat{\theta}_2)=4$，且假定 θ 真實值（true value）為 3。請問此兩個統計量何者為θ較佳的估計量？為什麼？

Ans：

$\hat{\theta}_1$ 相對 $\hat{\theta}_2$ 具有效性，因為$MSE(\hat{\theta}_1)<MSE(\hat{\theta}_2)$ ，所以 $\hat{\theta}_1$ 為較佳的估計量。

補 8.3【高第一企研】令 d_1 與 d_2 分別為參數 θ 之偏估計式（Estimator）。若 $E(d_1)=\theta$，$V(d_1)=8$，$E(d_2)=\theta+3$，$V(d_2)=3$，試問，哪一估計式較佳？

Ans：

d_1 較佳

補 8.4【中原國貿】已知甲、乙兩人為估計母體平均 μ 起見，各自從該母體抽出分別為 n1 及 n2 之隨機樣本，且計算得樣本平均數 $\bar{x}_1$及 $\bar{x}_2$，今若將兩樣本混合，而以下列兩個推定量估計 μ：

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)，\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{n_1+n_2}(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)$$

(1) 請問這個推定量以何者叫優？為什麼？

(2) 假設母體為常態分配 N（μ，σ^2），試求 $\hat{\mu}_1$ 與 $\hat{\mu}_2$ 之抽樣分配。

Ans：

(1) 兩個推定量都是「不偏估計量」，但因為 $\frac{Var(\hat{\mu}_2)}{Var(\hat{\mu}_1)}>1$，所以 $\hat{\mu}_2$ 相對較優

(2) 常態分配之線性組合仍為常態分配，故～

$$\hat{\mu}_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu , \sigma^2\left(\frac{n_1+n_2}{4n_1n_2}\right) \right)$$

$$\hat{\mu}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu , \sigma^2\left(\frac{1}{n_1+n_2}\right) \right)$$

補 8.5【台大國發】假設 X 的母體分配為常態，其期望值為 μ，變異數為σ^2，考慮從隨機樣本觀察值 X_1，X_2，.....，X_n 估計μ，以下為 3 個估計式：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2n} \sum_{i=2}^{n} x_i$$

試問此三個估計值是否滿足：

(1) 不偏性（unbiasedness）？

(2) 漸進不偏性（asymptotic unbiasedness）？

(3) 一致性（consistency）？

Ans：

(1) 只有 $\bar{x}$ 具有「不偏性」。

(2) 三者都具有「漸進不偏性」。

(3) 只有 $\bar{x}$ 與 $\hat{\mu}$ 具有「一致性」。

補 8.6【彰師資管】隨機抽取某校 36 位大學生的樣本，其操行成績的平均數和標準差分別為 2.6 和 0.3，求該校學生平均數的 95%信賴區間？

Ans：

〔2.502 , 2.698〕

補 8.7【高第一運儲】為了檢驗某款迷你車的耗油量，經測試 1 公升的油料所能行駛的里程數 6 次，分別為 17.2、16.5、17.5、17.7、16.1、15.9 公里。若假設里程數為常態分配，試求該車款 1 公升油料平均行駛之里程數的 95%信賴區間。

Ans：

〔16.0245 , 17.6089〕

補 8.8【成大國企】由常態分配中，隨機抽出 4 筆資料，其樣本平均數為 10，樣本標準差為 6，求在 95%信賴度下，母體平均數 μ 的信賴區間（已知母體的標準差是 5）。

Ans：

〔5.1 , 14.9〕

補 8.9【朝陽財金】某工廠生產之電池壽命呈常態分配，其母體標準差為 9 小時，在信賴水準 90%下：

(1) 若抽 9 個，其平均壽命為 100 小時，試對該工廠電池平均壽命進行區間估計。

(2) 若母體標準差不知，抽 9 個，平均壽命為 100 小時，樣本標準差為 10 小時，試對該工廠電池平均壽命進行區間估計。

(3) 若不知電池平均壽命是否呈常態分配，僅知母體標準差 9 小時，若抽 9 個，平均壽命為 100 小時，試對該工廠電池平均壽命進行區間估計。

Ans：

(1) 〔95,065 , 104.935〕

(2) 〔93.8 , 106.2〕

(3) 〔90.5132 , 109.4868〕

補 8.10【台大農經】假設裕隆汽車最近一批出廠的迷你車共有 500 部，抽取其中 60 部，而有瑕疵者 7 部，試求瑕疵率 p 的 95%信賴區間。

Ans：

〔0.0398 , 0.1935〕

補 8.11【政大企研】從商學院 1000 位學生中，隨機抽取 100 位學生調查，其中有 30 人贊同暑期學習制度，試問贊同暑期學習之學生比率的 95%可信賴區間為何？

Ans：

〔0.2144 , 0.3856〕

補 8.12【輔大管研】某一家公司想要瞭解員工之平均年齡；今自全部 300 位員工中隨機抽取 50 位員工，且其平均年齡為 36 歲，標準差為 12 歲：

(1) 請建立員工平均年齡的 95%信賴區間。

(2) 如果希望建立的 95%信賴區間控制在±2 歲內，試問需要多少個樣本。

Ans：

(1) 〔32.9636 , 39.0364〕

(2) 需要至少 95 個樣本

補 8.13【銘傳國企】民意調查人員得到某首長施政整體表現滿意度的 95%信賴區間為〔0.625 , 0.675〕，試問其抽樣樣本數應為多少人？（無條件進位）

Ans：

(1) 1399

補 8.14【台大商研】調查 600 個家庭中，有儲蓄的家庭有 366 家，試問

(1) 有儲蓄家庭的百分比 p 的估計量及 p 的 95%信賴區間。

(2) 若使 p 的 95%信賴區間的區間長度不超過 0.03，則樣本需為多少？

Ans：

(1 〔0.571 , 0.649〕

(2 約 4062

補 8.15《台大經濟》假設 X_1，X_2，...，X_n 是取自常態分配 N（μ，σ^2）的 n 個樣本，n 為大於 100 的偶數，考慮以下幾個參數μ的估計式：

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + \cdots\cdots + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{3}{2}x_n\right)$$

$$\hat{\mu}_1 = x_{100}$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

請問：

(1) 那些估計式是不偏的（unbiased）？為什麼？

(2) 那些估計是是一致的（consistent）？為什麼？

Ans：

(1) $\hat{\mu}_1$、 $\hat{\mu}_2$、 $\hat{\mu}_3$ 都是 (2) $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_3$ 是

補 8.16《中山資管》當下列條件變化而其他條件不變的情況下，母體平均數信賴區間的估計會如何變化？

(1) 樣本 n 增加。

(2) 信賴水準 1-α 提高？

(3) 母體變異數 σ^2 變大。

每小題請回答變大，變小、不變或沒有必然關係。

Ans：

(1) 樣本數 n 增加，信賴區間變小。

(2) 信賴水準 1-α 提高，則信賴區間變大。

(3) 母體變異數 σ^2 變大，則信賴區間變大。

補 8.17《東吳國貿》假設 μ_A，σ_A^2 及 μ_B，σ_B^2 依序為所有 A 型燈泡及 B 型燈泡的常態母體平均數及變異數，而且已知 $\sigma_A = 26$ 及 $\sigma_B = 27$。今隨機抽取 A 型燈泡 40 個及 B 型燈泡 50 個進行平均壽命檢驗，A 型燈泡的平均壽命為 418 小時，B 型燈泡的平均壽命為 402 小時。試求 $\mu_A - \mu_B$ 的 95 %信賴區間。

Ans：

（5.895， 26.105）

補 8.18《中山財管》有一個汽車修理行的招牌生意是為各行汽車裝設省油裝置，為了要了解這種省油裝置的裝設是否確實有省油的功效，隨機抽取 8 輛有裝設這種省油裝置的汽車，並記錄他們裝設這種省油裝置前後行駛 100 公里的耗油量如下（單位：1 加侖）

車輛編號	1	2	3	4	5	6	7	8
裝設前	3.2	4.6	3.6	5.3	6.2	3.2	3.6	4.5
裝設後	2.9	4.7	3.2	5.0	5.7	3.3	3.4	4.3

設每輛汽車耗油量皆呈常態分配，求一輛汽車裝設這種省油裝置之前與之後行駛 100 公里平均耗油量差的 90%信賴區間

Ans：

（0.0673 , 0.3577）

補 8.19《台大商研》(1) 以 90%的信賴水準且誤差範圍在 0.03 之內，請問估計一個母體比例值所需要的樣本大小是多少？假設樣本比例值未知。

(2) 假設你知道樣本比例值應該不會小於 0.75，請重做(1)小題。

(3) 假設使用(2)的計算結果得到樣本大小，發現樣本比例值為 0.92，請以 90 %的信賴水準估計母體比例值。

Ans：

(1) n 取 752　　(2) n 取 564　　(3) （0.9012 , 0.9388）

補 8.20《嘉大行銷》某公司有一批重量是服從常態分配的產品中隨機抽取 10 件，測量各件產品的重量（公斤），以了解產品重量的變異，此 10 件產品重量分別是 6.1，5.7，6.0，5.9，5.8，6.3，5.8，6.1，5.9，6.2 。試求：

(1) 此公司產品重量的變異數σ^2之點估計值？

(2) 此公司產品重量的變異數σ^2之 90%信賴區間？

(3) 此公司產品重量的標準差σ之 95%信賴區間？

Ans：

(1) S^2=0.03733 (2) （0.01986 , 0.10104） (3) （0.13289 , 0.35273）

補 8.21《淡江國貿》設 8.6、7.9、8.3、6.4、8.4、9.8、7.2、7.8、7.5 為自平均數 μ＝8，標準差為 σ 之常態分配中所抽出之大小為 9 的隨機樣本之一組觀測值，試根據此一樣本資料，求σ2 之 90%的信賴區間。

Ans：

（0.43442 , 2.21045）

補 8.22《中央企管》為研究早餐對工作效率的影響，隨機自公司員工中抽出 16 人，在用完餐後 2 小時量測其血糖濃度（X，mg/100cm^3）。假設隨機變數 X 服從常態分配，μ及 σ 代表其平均數及標準差，若 16 人的血糖平均數和標準差分別為 $\bar{x} = 112.8$， $S = 9.6$ ：

(1) 建立 μ 的 95%信賴區間，並且根據此一區間針對虛無假設～

H_0：μ＝110 相對於對立假設 H_1：μ≠110 進行檢定。

(2) 假設 σ＝10，若期望 μ 的 95%的信賴區間之長度為 5，則應該抽出多少員工加以實驗？

Ans：

(1) 不在此次考試範圍 (2) 取 n=62（人）

補 8.23《輔大企管》某大學針對引進外籍學生政策，執行一項全校性的意見調查，以隨機抽樣方式訪問了 625 位學生，結果有 400 位學生支持外籍學生來台修課。

(1) 請問支持比例 P 之 90%信賴區間。

(2) 若欲以樣本比例 $\hat{P}$ 估計母體比例 P，且要求估計之 95%的估計誤差界線不超過 0.04，問滿足此要求之抽樣樣本數 n 應取多少？（根據過去類似調查，已知母體比例 P 之範圍介於 0.55～0.70 間）

Ans：

(1) （0.6084 , 0.6716） (2) n=595

觀念題《淡江管科、清大工工》Suppose that we obtain a 95% confidence of the mean μ to be (65.5, 68.4). We know that $P(65.5 \leqq \mu \leqq 68.4) = 0.95$. → Yes or No ? Why?

Ans：

錯。μ 落在此區間 (65.5, 68.4) 內之機率不是 0 就是 1。