Two-Way ANOVA

~ Analysis of Variance (ANOVA) ~

二因子的變異數分析

雙因子變異數分析 ~未重複實驗

基本變異數分析表

雙因子統計模式的建立(未重複實驗)

抽樣資料

因子	A_1	A_2	…	A_c	B平均
B_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1c}	$\bar{B}_1$
B_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2c}	$\bar{B}_2$
:	:	:	…	:	:
B_r	x_{r1}	x_{r2}	…	x_{rc}	$\bar{B}_r$
A平均	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	…	$\bar{A}_c$	$\bar{\bar{x}}$

其中 $\bar{A}_j = \dfrac{\sum_{j=1}^{r} x_{ij}}{r}$ $\quad\bar{\bar{x}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c} x_{ij}}{r \times c} = \dfrac{\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c} x_{ij}}{n_T}$

$\bar{B}_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{c} x_{ij}}{c}$

雙因子各變異的分解(未重複實驗)

總變異＝A因子組間變異＋ B因子組間變異＋組內變異

SST ＝ SSA ＋ SSB ＋ SSE

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(\bar{A}_j-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(\bar{B}_i-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(x_{ij}-\bar{A}_j-\bar{B}_i+\bar{\bar{x}})^2$$

$$SST=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}{x_{ij}}^2-n_T\bar{\bar{x}}^2=n_T\sigma_T^2$$

$$SSA=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(\bar{A}_j-\bar{\bar{x}})^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\bar{A}_j^2-n_T\bar{\bar{x}}^2=n_T\sigma_{\bar{A}_j}^2$$

$$SSB=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}(\bar{B}_i-\bar{\bar{x}})^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\bar{B}_i^2-n_T\bar{\bar{x}}^2=n_T\sigma_{\bar{B}_i}^2$$

SSE = SST - SSA - SSB 其中 $n_T=rc$

雙因子變異數分析表(未重複實驗)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F檢定
A因子	SSA	c-1	MSA=$\frac{SSA}{c-1}$	$F_A^* = \frac{MSA}{MSE}$
B因子	SSB	r-1	MSB=$\frac{SSB}{r-1}$	
隨機	SSE	(c-1)(r-1)	MSE=$\frac{SSE}{(c-1)(r-1)}$	$F_B^* = \frac{MSB}{MSE}$
總和	SST	n_T-1		

檢定A因子是否有影響： $\mathrm{F}_{\mathrm{A}}^* > F_{\mathrm{r-1,(r-1)(c-1)},\,\alpha} \rightarrow$ 拒絕H_0

檢定B因子是否有影響： $\mathrm{F}_{\mathrm{B}}^* > F_{\mathrm{c-1,(r-1)(c-1)},\,\alpha} \rightarrow$ 拒絕H_0

案例1

設有甲、乙、丙三種不同品種的稻米，分別使用X、Y、Z、W四種不同的肥料。今隨機選擇面積等條件相同的12塊田地做實驗，得到收穫量（以千公斤計）如下表：

肥料	品種		
	甲	乙	丙
X	8	3	7
Y	10	4	8
Z	6	5	6
W	8	4	7

在顯著水準0.05下，試分別檢定(1)不同品牌；(2)不同肥料，所得到的平均收穫量有無顯著差異？

「應用統計學 二版」p367，李德治、童惠玲，博碩文化

案例1 解說(a)

先計算各行列總和

肥料(A)	品種(B) 甲	乙	丙	A平均
X	8	3	7	6
Y	10	4	8	22/3
Z	6	5	6	17/3
W	8	4	7	19/3
B平均	8	4	7	19/3

$$SST = \sum\sum(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum\sum x_{ij}{}^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = 528 - 12 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 46.67$$

$$SSA = \sum\sum(\bar{A}_j - \bar{\bar{x}})^{\mathbf{2}} = \sum\sum \bar{A}_j^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = 3\left[6^2 + \left(\frac{22}{3}\right)^2 + \left(\frac{17}{3}\right)^2 + \left(\frac{19}{3}\right)^2\right] - 12 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2$$

$$= 4.667 \ \ (= n_T\sigma_{\bar{A}_j}^2 = 12 \times 0.3888)$$

$$SSB = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{r}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{c}}(\bar{B}_i - \bar{\bar{x}})^{\mathbf{2}} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\bar{B}_i^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = 4[8^2 + 4^2 + 7^2] - 12 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 34.667$$

$$(= n_T\sigma_{\bar{B}_i}^2 = 12 \times 2.8888)$$

$$\mathrm{SSE = SST - SSA - SSB} = 7.333$$

案例1 解說(b)

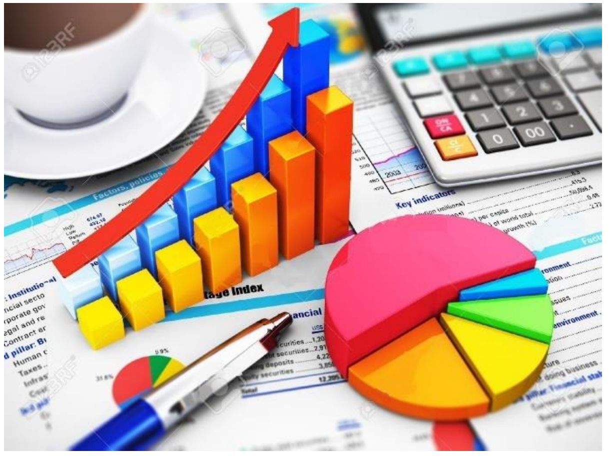
變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F檢定
肥料(A)	SSA=4.667	4-1=3	MSA=$\frac{SSA}{c-1}$=4.667/3	
品種(B)	SSB=34.667	3-1=2	MSB=$\frac{SSB}{r-1}$=34.667/2	$F_A^* = \frac{MSA}{MSE}$=1.273
隨機	SSE=7.333	3×2=6	MSE=$\frac{SSE}{\mathrm{rc(n-1)}}$=7.333/6	$F_B^* = \frac{MSB}{MSE} = 14.182$
總和	SST=46.667	12-1=11		

(1)依題，先檢定「品牌」因子： $\begin{cases} \mathrm{H_0}: \mu_{甲} = \mu_{乙} = \mu_{丙} \\ \mathrm{H_1}: \mu_{甲}, \mu_{乙}, \mu_{丙} \text{ 不全相等} \end{cases}$

從ANVOA Table知，在顯著水準0.05下，F_B^* =9.544 > $F_{0.05,2,6}$=5.14，故拒絕H_0，亦即不同品牌平均收穫量有顯著差異。

(2)依題，再檢定「肥料」因子： $\begin{cases} \mathrm{H_0}: \mu_X = \mu_Y = \mu_Z = \mu_W \\ \mathrm{H_1}: \mu_X, \mu_Y, \mu_Z, \mu_W \text{不全相等} \end{cases}$

從ANVOA Table知，在顯著水準0.05下，F_A^* =1.273 < $F_{0.05,3,6}$=4.76，故不拒絕H_0，亦即不同肥料其平均收穫量無顯著差異。



雙因子變異數分析 ~重複實驗

基本變異數分析表

雙因子統計模式的建立(重複實驗)

因子	A_1	A_2	…	A_c	B平均
B_1	X_{111} X_{112} ⋮ X_{11n}	X_{121} X_{122} ⋮ X_{12n}	…	X_{1c1} X_{1c2} ⋮ X_{1cn}	$\bar{B}_1$
	$\overline{B_1A_1}$	$\overline{B_1A_2}$	…	$\overline{B_1A_c}$	每列有c×n筆資料
B_2	X_{211} ⋮ X_{21n}	X_{221} ⋮ X_{22n}	…	X_{2c1} ⋮ X_{2cn}	$\bar{B}_2$
	$\overline{B_2A_1}$	$\overline{B_2A_2}$	…	$\overline{B_2A_c}$	
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
B_r	X_{r11} ⋮ X_{r1n}	X_{r21} ⋮ X_{r2n}	…	X_{rc1} ⋮ X_{rcn}	$\bar{B}_r$
	$\overline{B_rA_1}$	$\overline{B_rA_2}$	…	$\overline{B_rA_c}$	
A平均	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	…	$\bar{A}_c$	$\bar{\bar{x}}$

細格平均數
(cell means)

每行有r×n筆資料

雙因子各變異的分解(重複實驗)

總變異 = A因子變異 + B因子變異 + A、B交互影響變異 + 組內變異

SST = SSA + SSB + SSAB + SSE

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} {x_{ijk}}^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = n_T\sigma_T^2$$

$$SSA = \mathrm{rn}\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{A}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \mathrm{rn}\sum_{j=1}^{c} \bar{A}_j^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = n_T\sigma_{\bar{A}_j}^2$$

$$SSB = \mathrm{cn}\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{\mathrm{B}}_\mathrm{i} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \mathrm{cn}\sum_{i=1}^{r} \bar{\mathrm{B}}_\mathrm{i}^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = n_T\sigma_{\bar{\mathrm{B}}_\mathrm{i}}^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \overline{\mathrm{A_jB_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{x}_{\mathrm{ijk}}^2 - \mathrm{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\overline{\mathrm{A_jB_i}}^2$$

SSAB = SST - SSA – SSB - SSE

其中 $n_T = rcn$

雙因子變異數分析表(重複實驗)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F檢定
A因子	SSA	c-1	MSA=$\frac{SSA}{c-1}$	$F_A^* = \frac{MSA}{MSE}$
B因子	SSB	r-1	MSB=$\frac{SSB}{r-1}$	$F_B^* = \frac{MSB}{MSE}$
交互影響	SSAB	(c-1)(r-1)	MSAB=$\frac{SSAB}{(c-1)(r-1)}$	$F_{AB}^* = \frac{MSAB}{MSE}$
隨機	SSE	rc(n-1)	MSE=$\frac{SSE}{rc(n-1)}$	
總和	SST	n_T-1		

檢定A因子是否有影響： $F_A^* > F_{c-1,rc(n-1),\alpha} \rightarrow$ 拒絕H_0

檢定B因子是否有影響： $F_B^* > F_{r-1,rc(n-1),\alpha} \rightarrow$ 拒絕H_0

檢定AB因子是否有交互影響：$F_{AB}^* > F_{(c-1)(r-1),rc(n-1),\alpha} \rightarrow$ 拒絕H_0

案例2

某公司統計資料顯示新型手機銷售狀況（請見下表），其中販售店面和包裝型態這兩項因子共形成了12種組合，在每種組合下，皆有二個實際觀察值，請問在顯著水準0.05下，此兩項因子是否對銷售量有影響？

銷售店面	**包裝型態**			
	甲	**乙**	**丙**	**丁**
百貨公司	45	56	65	48
	50	63	71	53
超級市場	57	69	73	60
	65	78	80	57
專賣店	70	75	82	71
	78	82	89	75

「現代統計學」p214，吳柏林 著，五南圖書

案例2 解說(a)

先計算各行列總和

銷售店面	包裝型態 甲	乙	丙	丁	總和[平均] (sum)
百貨公司	45	56	65	48	451 [56.375]
	50	63	71	53	
sub sum	95	119	136	101	
超級市場	57	69	73	60	539 [67.375]
	65	78	80	57	
sub sum	122	147	153	117	
專賣店	70	75	82	71	622 [77.75]
	78	82	89	75	
sub sum	148	157	171	146	
總和[平均] (sum)	365 [60.83]	423 [70.50]	460 [76.67]	364 [60.67]	1612 [67.167]

案例2 解說(b)

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=1}^{2} {x_{ijk}}^2 = 45^2 + 50^2 + \cdots + 75^2 = 111550$$

$$(4 \times 2)\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} \bar{A}_j^2 = 451^2 + 539^2 + 622^2 = 110100.75$$

$$(3 \times 2)\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \bar{B}_i^2 = 365^2 + 423^2 + 460^2 + 364^2 = 109375$$

$$2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} \overline{\mathrm{A_j B_i}}^2 = 95^2 + 119^2 + 136^2 + \cdots + 146^2 = 111292$$

$$SST = \sum\sum\sum {x_{ijk}}^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = 111550 - 24 \times 67.167^2 = 3277.34$$

$$SSA = \mathrm{rn}\sum \bar{A}_j^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = 110100.75 - 24 \times 67.167^2$$

$$SSB = \mathrm{cn}\sum \bar{\mathrm{B}}_i^2 - n_T\bar{\bar{x}}^2 = 109375 - 24 \times 67.167^2 = 1102.34$$

$$SSE = \sum\sum\sum \mathrm{x}_{ijk}^2 - \mathrm{n}\sum\sum \overline{\mathrm{A_j B_i}}^2 = 111550 - 111292 = 258$$

SSAB = SST - SSA – SSB – SSE = 88.91

案例2 解說(c)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F檢定
A因子	SSA=1828.09	3-1=2	MSA=$\frac{SSA}{c-1}$=914.04	$F_A^* = \frac{MSA}{MSE}$=42.51
B因子	SSB=1102.34	4-1=3	MSB=$\frac{SSB}{r-1}$=367.44	$F_B^* = \frac{MSB}{MSE} = 17.09$
交互影響	SSAB=88.91	2×3=6	MSAB=$\frac{SSAB}{(c-1)(r-1)}$=14.81	$F_{\mathrm{AB}}^* = \frac{MSAB}{MSE}$=0.69
隨機	SSE=258	3×4×(2-1)=12	MSE=$\frac{SSE}{\mathrm{rc(n-1)}}$=21.5	
總和	SST=3277.34	24-1=23		

案例2 解說(d)

(A)先檢定兩因子間是否有交互作用

建立販售店面與包裝形式之間是否存在交互作用：
$$\begin{cases} H_0：\text{販售店面與包裝形式沒有交互作用} \\ H_1：\text{販售店面與包裝形式有交互作用} \end{cases}$$

從ANVOA Table知，在顯著水準0.05下， F^*_{AB} =0.69 < $F_{0.05,6,12}$=3.09，故接受H_0，表示交互作用不存在，亦即可以個別分析販售店面與包裝形式對電器銷售的影響。

(B)檢定販售店面是否會影響電器之銷售
$$\begin{cases} H_0：\text{販售店面不影響電器之銷售} \\ H_1：\text{販售店面會影響電器之銷售} \end{cases}$$

從ANVOA Table知，在顯著水準0.05下， F^*_{A} =42.51 > $F_{0.05,2,12}$=3.89，故拒絕H_0，表示認為販售店面會影響電器之銷售。

(C)檢定包裝形式是否會影響電器之銷售
$$\begin{cases} H_0：\text{包裝形式不影響電器之銷售} \\ H_1：\text{包裝形式會影響電器之銷售} \end{cases}$$

從ANVOA Table知，在顯著水準0.05下， F^*_{B} =17.09 > $F_{0.05,3,12}$=3.49，故拒絕H_0，表示認為包裝形式會影響電器之銷售。

The End