Two-Sample Tests

~ Fundamentals of Hypothesis Testing ~

兩個母體的假設檢定

在進行資料分析時，常必須採用相對角度來檢視資料。所以在檢定過程中，除了瞭解抽樣與母體的差異外，資料的分配情況有時也會是分析的重點，所以兩個母體的檢定，就是在瞭解資料的分配差異。

兩母體平均數差的假設檢定(獨立樣本)

若我們想要瞭解全校男生與女生在商用統計學上成績表現是否有差異時，可以把男生視為一個母體，女生視為一個母體，所以在進行隨機抽樣時，可以同時但個別的進行抽樣調查，彼此互不影響。此種狀況下的檢定決策，即為所謂獨立樣本的兩母體平均差假設檢定

常見的檢定適用情境

兩母體平均數差

$\mu_1 - \mu_2$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

- 大樣本
  - 兩母體變異數已知 — Z檢定(σ_1^2，σ_2^2)
  - 兩母體變異數未知 — Z檢定(s_1^2，s_2^2)
- 小樣本 — 母體為常態
  - 兩母體變異數已知 — Z檢定(σ_1^2，σ_2^2)
  - 兩母體變異數未知且不相等 — t_φ檢定(s_1^2，s_2^2)
  - 兩母體變異數未知且相等 — t_ν檢定(s_p^2)

兩母體平均數差(獨立樣本)的Z檢定

適用情境

母體1（μ_1，σ_1^2）

母體2（μ_2，σ_2^2）

樣本1（$\bar{x}_1$，s_1^2） 樣本2（$\bar{x}_2$，s_2^2）

常態	變異數已知	大樣本	$Z(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$
		小樣本	$Z(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$
	變異數未知	大樣本	$Z(\mu_1-\mu_2,\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})$
		小樣本	
未知	變異數已知	大樣本	$Z(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$ ($n_1 \geqq 30$, $n_2 \geqq 30$)
		小樣本	
	變異數未知	大樣本	
		小樣本	

回顧Z分配之抽樣分配

$$\bar{x}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \qquad \bar{x}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

若兩個抽樣分配都服從常態分配，則兩樣本平均數的差也會服從常態分配

兩母體平均數差(獨立樣本)的Z檢定

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

若 $z^* > z_\alpha$ ，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(z > z^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

若 $z^* < -z_\alpha$ ，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(z < z^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

若 $|z^*| > z_{\alpha/2}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = 2P(z > |z^*|)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例1

某甲奶粉公司廣告宣稱，他們的產品較另一乙品牌好。這裡所謂的「好」，是指嬰兒如果食用該奶粉，體重明顯增加較快，消基會為了查證甲奶粉公司廣告是否誇大其詞，隨機抽取10位普出生的健康寶寶，其中5位餵食甲公司奶粉，另5位則以乙公司奶粉餵食，觀察每一位嬰兒體重增加的值如下（單位：盎司）：

嬰兒	1	2	3	4	5
甲公司奶粉	32	24	30	29	27
乙公司奶粉	30	36	28	37	40

假設兩週內嬰兒體重上升服從常態分配，試問若已知食用甲公司奶粉體重上升變異數σ_1^2為11，而乙公司奶粉體重增加變異數σ_2^2為9，則在顯著水準α=0.05下，該公司廣告之宣稱是正確？

「現代統計學」p180，吳柏林 著，五南圖書

案例1 解說

令食用甲公司、乙公司奶粉增加的重量平均值為μ_1、 μ_2：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

(2)母體常態→已知 $\sigma_1^2 = 11$， $\sigma_2^2 = 9$ → 採用「Z檢定」

(3)採左尾檢定，可用標準檢定法→ $\alpha=0.05$ → $-Z_c= -1.64$

(4) 所以檢定統計量 $Z^* = \dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \dfrac{(28.4-34.2)-0}{\sqrt{\frac{11}{5}+\frac{9}{5}}} = -2.9$

$Z^* = -2.9 < -1.64$

→檢定統計量拒絕虛無假設H_0，表示廣告宣稱誇大其詞。

案例2

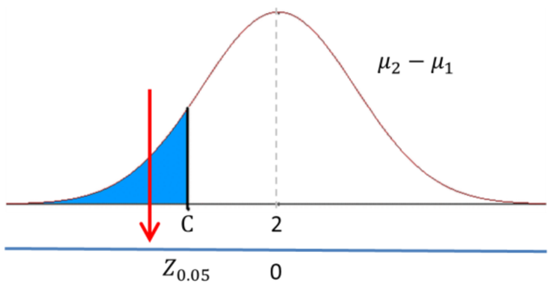
某學者宣稱利用他所發展的教學法可以讓國中生的作文成績在半年內明顯的提高至少 2分以上，某教育團體對該學者的說法質疑，於是該教育團體找了一所國中進行實驗，首先從該校學生隨機抽取 100位學生進行測驗，此 100位學生作文平均成績 4.5分，標準差 1.8分。接著進行該項教學法，經過半年後再隨機抽取 81位學生，得其作文平均分數 5.9分，標準差 1.9分。請以顯著水準 0.05的條件下核定該教學法是否如該學者所需稱？

「統計學 二版」p15-6，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例2 解說

本題屬大樣本，可以採「Z檢定」。假設μ_1為原本的教學法平均值（試驗前母體）、μ_2為宣稱教學法的平均值（試驗後母體），兩者雖為前後試驗，但抽樣過程是獨立、隨機抽取，所以視為獨立樣本的Z檢定：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\mu_2-\mu_1 \geq 2 \\ H_1：\mu_2-\mu_1 < 2 \end{cases}$



(2)母體常態，大樣本 →雖 σ_1^2、σ_2^2 未知，以S_1^2、S_2^2 代替

(3)採左尾檢定，可用標準檢定法→ α=0.05 → $-Z_c$= -1.64

(4) 檢定統計量 $Z^* = \dfrac{(\bar{x}_2-\bar{x}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \dfrac{(5.9-4.5)-2}{\sqrt{\dfrac{1.8^2}{100}+\dfrac{1.9^2}{81}}} = -2.163$

$$Z^* = -2.163 < -Z_{0.05} = -1.645$$

→檢定拒絕H_0，表示該教學法沒有顯著的證據可以證明學生作文成績進步2分以上。

案例3

某麵包工廠有兩台製造麵包的機器，已知第一台機器的變異數為52，第二台機器的變異數為60。該麵包廠欲比較兩台機器所產生的麵包數量是否有異，先第一台機器製造麵包，在連續12天的操作下，求得每天平均生產1124.25箱的麵包。接著再以第二台連續操作10天，求得每天平均製造1138.7箱的麵包，假設兩台機器所生產的麵包數量呈常態分配。試以顯著水準0.05檢定是否第二台機器生產的麵包數量比第一台多？

「統計學 二版」p15-7，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例3 解說

母體為常態，變異數已知($\sigma_1^2 = 52,\ \ \sigma_2^2 = 60$)，採Z檢定：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}$

(2)採<u>左尾檢定</u>，用p值法 → α=0.05 → $-Z_{0.05} = -1.64$

(3) $P_{value} = P(z < z^*) = P\left(z < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$

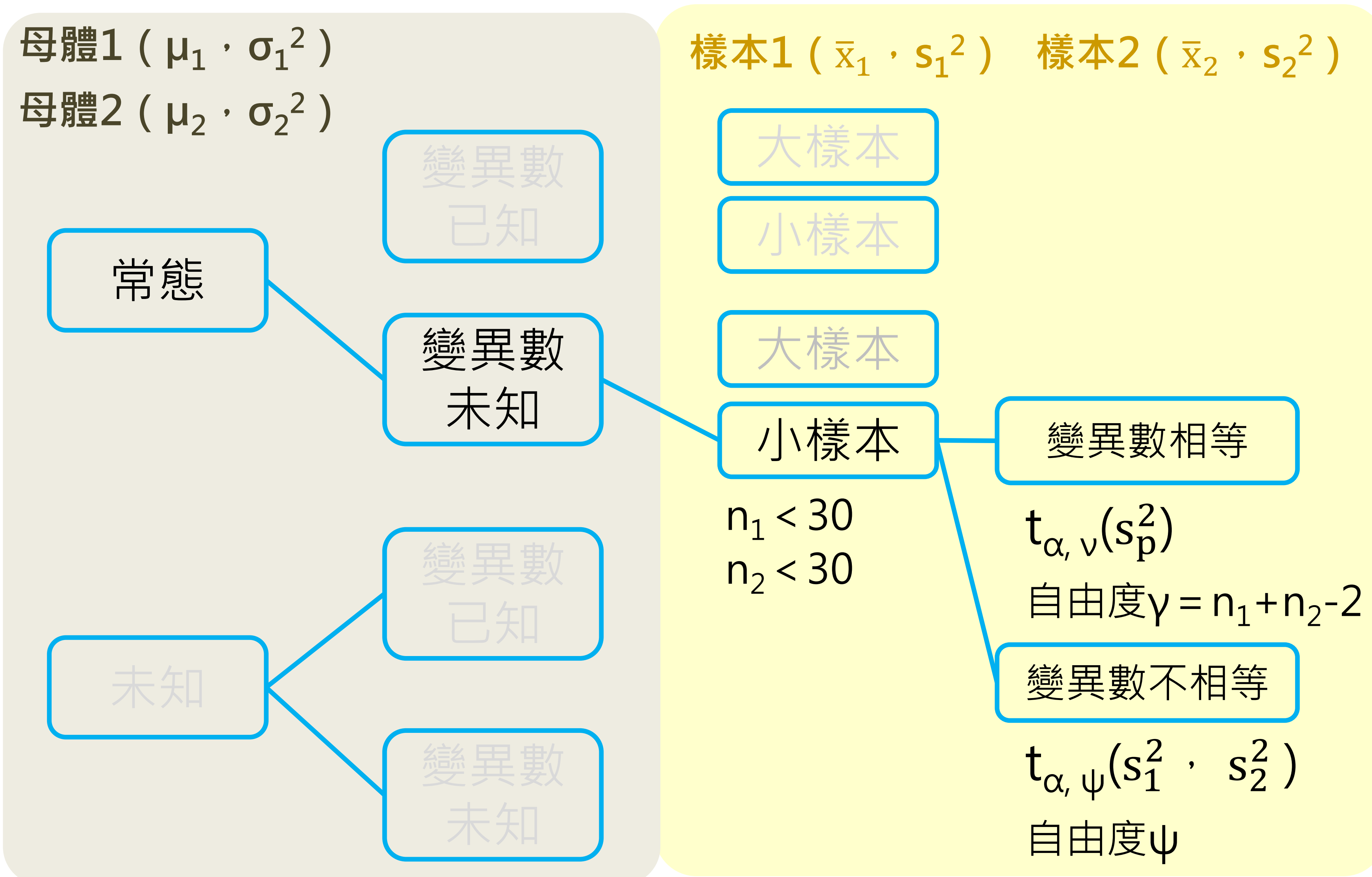
$$= P\left(Z < \frac{(1124.25 - 1138.7) - 0}{\sqrt{\frac{25}{12} + \frac{60}{10}}}\right) = P(Z < -4.5) \approx 0$$

$P_{value} = 0 < \alpha = 0.05$

→檢定拒絕H_0，表示第二台機器生產的數量比第一台的多。

兩母體平均數差(獨立樣本)的 t 檢定

適用情境



回顧 t 分配之抽樣分配

$\bar{x}_1 \sim t_{\alpha,\, n_1-1}(s_1^2)$　　　$\bar{x}_2 \sim t_{\alpha,\, n_2-1}(s_2^2)$

其中 $t_{\alpha,n-1}(s^2) = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}}$

➔ 變異數相等

"相等"，所以找個共同的數來代表！

$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim t_{\alpha,\, n_1+n_2-2}(s_p^2)$

共同樣本變異數：

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

變異數不相等

$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim t_{\alpha,\psi}(s_1^2, s_2^2)$

"不相等"，所以自由度就有所不同！

自由度：

$$\psi = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

兩母體平均數差(獨立樣本)的 t 檢定

變異數相等

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

若 $t^* > t_{\alpha,\nu}$，拒絕 H_0

其中 $\nu = n_1 + n_2 - 2$

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(t_\nu > t^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

若 $t^* < -t_{\alpha,\nu}$，拒絕 H_0

其中 $\nu = n_1 + n_2 - 2$

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(t_\nu < t^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

若 $|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2},\nu}$，拒絕 H_0

其中 $\nu = n_1 + n_2 - 2$

P值法(右尾)：

$$P_{value} = 2P(t_\nu > |t^*|)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例4

嬰兒	1	2	3	4	5
甲公司奶粉	32	24	30	29	27
乙公司奶粉	30	36	28	37	40

承案例1，若在服從常態分配下，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（檢定變異數與母體變異數相同），但是 σ 未知，則在顯著水準α=0.05下，該公司廣告之宣稱是正確？

「現代統計學」p180，吳柏林 著，五南圖書

案例4 解說

令食用甲公司、乙公司奶粉增加的重量平均值為μ_1、 μ_2：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

(2)母體常態→ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，但σ未知 → 採用「t檢定」

(3)採左尾檢定，可用標準檢定法→$\alpha=0.05$ → $-t_{0.05}(8) = -1.86$

(4)$S_1=3.05$, $S_2=5.02$, 自由度$\gamma = 5+5-2 = 8$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = 4.15^2$$

，所以檢定統計量

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(28.4-34.2)-0}{4.15\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}} = -2.21 < -1.86$$

→檢定統計量拒絕虛無假設H_0，表示廣告宣稱誇大其詞。

兩母體平均數差(獨立樣本)的 t 檢定

變異數
不相等

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

若 $t^* > t_{\alpha,\psi}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(t_\psi > t^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

若 $t^* < -t_{\alpha,\psi}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(t_\psi < t^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

若 $|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2},\psi}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = 2P(t_\psi > |t^*|)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例5

X理論和Y理論是管理控制的重要理論，A公司總經理為了解何種理論較有效，隨機選擇了16位員工分成Ⅰ、Ⅱ組，其中Ⅰ組施以X理論的環境；Ⅱ組給于Y理論的環境，然在年終給于員工績效評分如下：

方法	1	2	3	4	5	6	7	8	平均數	變異數
Ⅰ	86	82	84	83	84	83	85	87	84.25	2.786
Ⅱ	83	81	84	72	79	85	78	86	81	21.143

試以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定兩理論之效果？（假設母體變異數不相等）

「應用統計學 二版」p305，李德治、童惠玲，博碩文化

案例5 解說

母體可視為常態分配，獨立樣本且小樣本、變異數未知且不相等，可採「t檢定」：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\mu_1-\mu_2 \le 0 \\ H_1：\mu_1-\mu_2 > 0 \end{cases}$

(2)採右尾檢定，用標準檢定法→ α=0.05 → $t_{0.05,\,8}$= 1.86

(3)檢定統計量 $t^* = \dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} = \dfrac{(84.25-81)-0}{\sqrt{\frac{2.786}{8}+\frac{21.143}{8}}} = 1.879$

$$自由度\ \psi = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{2.786}{8}+\frac{21.143}{8}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2.786}{8}\right)^2}{8-1}+\frac{\left(\frac{21.143}{8}\right)^2}{8-1}} \approx 8$$

$t^* = 1.879 > t_{0.05,8} = 1.86$

→檢定拒絕H_0，表示X理論比較有效。

兩母體平均數差的假設檢定(成對樣本)

所謂「成對樣本」，就是所抽樣的樣本觀測值來自同一元素或條件，所以之間有同時、前後、左右或配對的關係。例如參與培訓計畫，培訓前與培訓後之差異（抽取不同人做比較）；比較兩品牌使用前後差異，所以讓同一受測者同時穿戴來記錄。

常見的檢定適用情境

$\bar{x}_{1i}$ - $\bar{x}_{2i}$

大樣本 — Z檢定(s_d^2)

成對母體差的
變異數σ_{d}^2通常未知

小樣本 — 母體
為常態 — t檢定(s_d^2)

$\mathrm{d}_i = x_{1i} - x_{2i}$ ：觀測值差

$\mathrm{\mu_d} = \mu_1 - \mu_2$ ：成對母體平均數的差

$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$ ：成對樣本差的平均數

$$\mathrm{s_d^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{\mathrm{d}})^2 = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{d_i^2} - \sum_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{n}} \bar{\mathrm{d}}^2$$

：成對樣本差的變異數

兩母體平均數差(成對樣本)的Z檢定

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_d \leq 0 \\ H_1: \mu_d > 0 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}$$

若 $z^* > z_\alpha$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(z > z^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_d \geq 0 \\ H_1: \mu_d < 0 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}$$

若 $z^* < -z_\alpha$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(z < z^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu_d = 0 \\ H_1: \mu_d \neq 0 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}$$

若 $|z^*| > z_{\alpha/2}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = 2P(z > |z^*|)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例6

下列資料為取自兩母體的配對樣本：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
樣本1	25	26	28	24	26	28	22	21	20	24	22	25
樣本2	26	24	28	26	21	24	26	22	20	21	23	24

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
樣本1	26	27	29	28	29	27	26	28	24	26	22	21
樣本2	21	26	21	26	25	24	25	23	28	27	22	24

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
樣本1	23	25	25	27	28	26	29	28	24	25	28	27
樣本2	28	25	21	20	26	25	24	25	26	29	21	20

試以此樣本檢定，在顯著水準$\alpha = 0.05$下，樣本2所代表的母體比樣本1所代表的母體平均數較大？

「應用統計學 二版」p308，李德治、童惠玲，博碩文化

案例6 解說

樣本數n=36，可視大樣本抽樣，成對樣本，採用「Z檢定」：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\mu_{\mathrm{d}} \leq\ 0 \\ H_1：\mu_{\mathrm{d}} >\ 0 \end{cases}$

(2)採右尾檢定，用標準檢定法→ α=0.05 → $Z_{0.05}$= 1.645

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}(x_{1i} - x_{2i}) = 1.4442$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{d}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{\mathrm{d}})^2 = \frac{1}{\mathrm{n-1}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{d_i^2} - \sum_{\mathrm{n-1}}^{\mathrm{n}} \bar{\mathrm{d}}^2 = 3.468^{\,2}$$

(3)檢定統計量 $z^* = \dfrac{\bar{\mathrm{d}}}{\sqrt{\frac{\mathrm{s_d^2}}{\mathrm{n}}}} = \dfrac{(1.4442)-0}{\sqrt{\frac{3.468^2}{36}}} = 2.498$

$$\mathrm{Z}^* = 2.498 > Z_{0.05} = 1.645$$

→檢定拒絕H_0，表示樣本2所代表的母體，其平均數沒有明顯證明較另一個母體大。

兩母體平均數差(成對樣本)的 t 檢定

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d \leq 0 \\ H_1 : \mu_d > 0 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}}$$

若 $t^* > t_{\alpha,n-1}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(t_{n-1} > t^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d \geq 0 \\ H_1 : \mu_d < 0 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}}$$

若 $t^* < -t_{\alpha,n-1}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(t_{n-1} < t^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d = 0 \\ H_1 : \mu_d \neq 0 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$t^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}}$$

若 $|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = 2P(t_{n-1} > |t^*|)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例7

某訓練計畫，隨機抽取5個樣本，測量其訓練前後的成績如下：

訓練計畫	1	2	3	4	5
訓練前	85	94	78	87	68
訓練後	92	88	80	90	69

(a)檢定訓練前後「平均成績」是否有顯著進步？

(b)在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，平均每人訓練後要「大於」訓練前多少分，其訓練結果才能稱為〝有顯著進步〞？

「統計學 二版」p15-28，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例7 解說1

(a)母體可視為常態分配，成對樣本且小樣本，採「t檢定」，

設x_1、x_2為訓練前與訓練後：

(1)建立左尾檢定 $\begin{cases} H_0: \mu_d \geq 0 \\ H_1: \mu_d < 0 \end{cases}$ 其中 μ_d 為成對母體平均數

的差：$\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ ，成對樣本差：$d_i = x_{1i} - x_{2i}$

(2)

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = -1.4$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \sum_{n-1}^{n} \bar{d}^2 = 4.72^2$$

(3)檢定統計量 $t^* = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}} = \frac{-1.4-0}{\sqrt{\frac{4.72^2}{5}}} = -0.663$

$t^* = -0.663 > -t_{0.05,4} = -2.1318$ （沒有小於臨界值）

→ 檢定不拒絕H_0，表示訓練計畫沒有顯著進步。

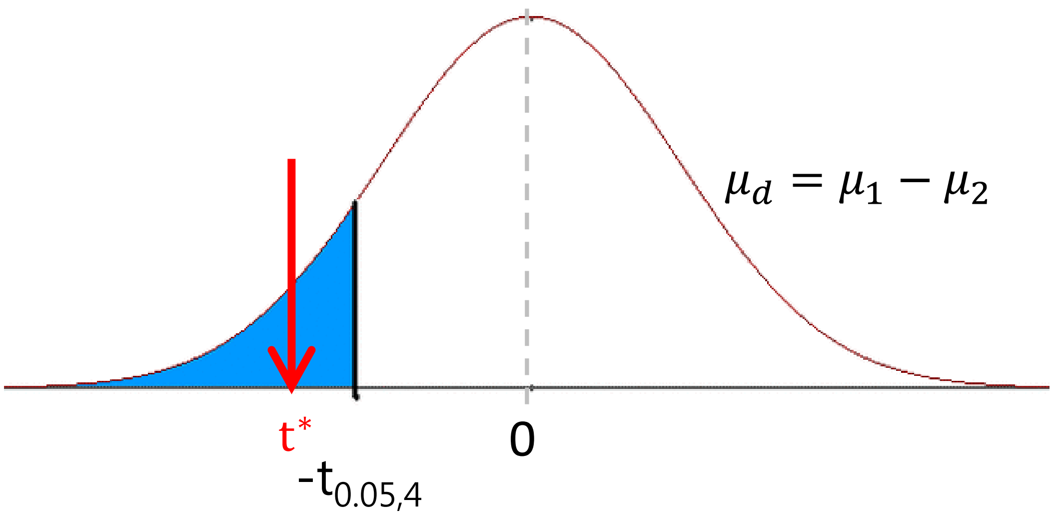
案例7 解說2

(b)欲達到顯著水準，拒絕虛無假設，利用檢定原則反求檢定統計量，所以其值必須滿足：

$t^* < -t_{0.05,4}$ $\qquad \dfrac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{4.72^2}{5}}} < -2.1218$

求解 $\bar{d} < -4.5$ $\qquad (\ d_i = x_{1i} - x_{2i}\ )$

所以訓練後平均成績必須大於訓練前 4.5分才可稱為有顯著進步。



兩獨立母體比例差的假設檢定

常見的檢定適用情境

兩母體比例差 p_1-p_2

$$\hat{p} \sim N(p_0 \;, \frac{p_0(1-p_0)}{n})$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ —— 大樣本 —— Z檢定

$\hat{p}_1 = \dfrac{x_1}{n_1}$，$n_1$為樣本數；$x_1$表成功次數；

$\hat{p}_2 = \dfrac{x_2}{n_2}$，$n_2$為樣本數；$x_2$表成功次數；

根據中央極限定理，大樣本的分配會趨近於常態分配

➔ $$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N(p_1 - p_2 \;, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2})$$

滿足 np ≧ 5 且 n(1-p) ≧ 5 ，即為〝大樣本〞

兩獨立母體比例差的Z檢定

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2 \sim N\left(p_1-p_2\ ,\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

檢定「$p_1 \le p_2$」與檢定「$p_1-p_2 \le 0$」是指同一件事，通常檢定是以$p_1-p_2=0$（①）做判定，此假設隱含著母體變異數相等的訊息，但是通常母體比例未知（ p_1, p_2 未知），所以要利用「共同樣本比例」來推導變異數：

$$\bar{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$$

➔ $$\hat{p}_1-\hat{p}_2 \sim N\left(0\ ,\frac{\bar{\mathrm{p}}(1-\bar{\mathrm{p}})}{n_1}+\frac{\bar{\mathrm{p}}\,(1-\bar{\mathrm{p}})}{n_2}\right)$$

①

兩獨立母體比例差的Z檢定

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : p_1 \leq p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_2}}}$$

$\bar{q} = (1 - \bar{p})$

若 $z^* > z_\alpha$ ，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$P_{value} = P(z > z^*)$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_2}}}$$

$\bar{q} = (1 - \bar{p})$

若 $z^* < -z_\alpha$ ，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$P_{value} = P(z < z^*)$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n_2}}}$$

$\bar{q} = (1 - \bar{p})$

若 $|z^*| > z_{\alpha/2}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$P_{value} = 2P(z > |z^*|)$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例8

某大學去年舉辦兩次週末教育學分班數學科教師甄選。第一次有98人報名，錄取54人。第二次有142人報名，錄取91人。試問在顯著水準$\alpha = 0.05$下，兩次週末教育學分班數學科教師甄試的率取率是否相同？

「現代統計學」p188，吳柏林 著，五南圖書

案例8 解說

令兩次的率取比例為 p_1、 p_2：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{cases}$

(2)因為屬於大樣本 → 可採用「Z檢定」

(3)採雙尾檢定，可用標準檢定法→ $\alpha/2=0.025$ →

兩個檢定量臨界值為 $\pm Z_{0.025} = \pm 1.96$

(4) $\hat{p}_1 = \frac{54}{98} = 0.55$， $\hat{p}_2 = \frac{91}{142} = 0.64$

$\bar{p} = \frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} = \frac{98\times0.55+142\times0.64}{98+142} = 0.6$ ，所以檢定統計量

$$|Z| = \left|\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1}+\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_2}}}\right| = \left|\frac{(0.55-0.64)-(0-0)}{\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{98}+\frac{0.6\times0.4}{142}}}\right| = 1.4 < 1.96$$

→接受虛無假設H_0，表示兩次率取率相同。

兩獨立母體變異數的假設檢定

常見的檢定適用情境

兩獨立母體變異數差異 σ_1^2 ，σ_2^2

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$ —— F檢定

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{\alpha,\, n_1-1,\, n_2-1}$$

若兩獨立母體的變異數各別為 σ_1^2 與 σ_2^2 ，如果我們想要瞭解的不是平均數的差異，而是兩個變異數的差異，此時就可以利用兩個樣本變異數 s_1^2 、 s_2^2 來進行。因為是檢定變異數，不是之前的母體平均數或比例，所以必須利用F檢定（應用F分配）來進行。

➔ 檢定 σ_1^2 與 σ_2^2 是否相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)，檢定 $F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

兩獨立母體變異數差異的F檢定

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \\ H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1 \\ H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases}$$

查表方便

在顯著水準 α 下，F檢定為： $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{\alpha, \nu_1, \nu_2} = \dfrac{1}{F_{1-\alpha, \nu_2, \nu_1}}$

其中 $\nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1$

兩獨立母體變異數差異的F檢定

右尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

若 $F^* > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P\left(F_{\nu_1,\nu_2} > F^*\right)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

左尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

若 $F^* < -F_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P\left(F_{\nu_1,\nu_2} < F^*\right)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \end{cases}$$

標準檢定法：

檢定統計量：

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

若$F^* > F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$，或

$F^* < F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$，拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$$F^* > 1,\ P_{value} = 2P\left(F_{\nu_1,\nu_2} > F^*\right)$$

$$F^* < 1,\ P_{value} = 2P\left(F_{\nu_1,\nu_2} < F^*\right)$$

若 $P_{value} < \alpha$，拒絕 H_0

案例9

衡量財務投資的風險通常是以報酬的變異程度來比較，美國花旗銀行成長基金現在比較2種投資的風險，假設各投資1千萬在2種投資方案上，A方案代表穩健成長，B方案代表積極成長，並預測其每月營收如下表（單位：萬元）：

A	12	6	25	-5	18	6	-3	10	9	15
B	18	0	-15	32	25	-20	37	-15		

若每月報酬率是常態分配，試問在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，第A種投資風險是否較第B種投資風險高？

「現代統計學」p185，吳柏林 著，五南圖書

案例9 解說

令兩個投資方案的風險報酬的變異程度，以σ_1^2, σ_2^2 表示：

(1)根據題意，建立假設檢定 $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \ \geq \ \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \ \sigma_2^2 \end{cases}$

(2)服從母體常態→兩母體變異數 →採用「F檢定」

(3)採左尾檢定，用標準檢定法 → α = 0.05→檢定量臨界值為

$$F_{0.95,(10-1),(8-1)} = 1/F_{0.05,(8-1),(10-1)} = 1/3.29 = 0.304$$

(4) 而檢定統計量 $F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{82.2}{530.2} = 0.16 \ < \ 0.304$

→ 拒絕虛無假設H_0，表示第A種投資風險較第B種投資風險低。

The End