One-Sample Tests

~ Fundamentals of Hypothesis Testing ~

單一母體的假設檢定

單一母體平均數的假設檢定

常見的檢定適用情境

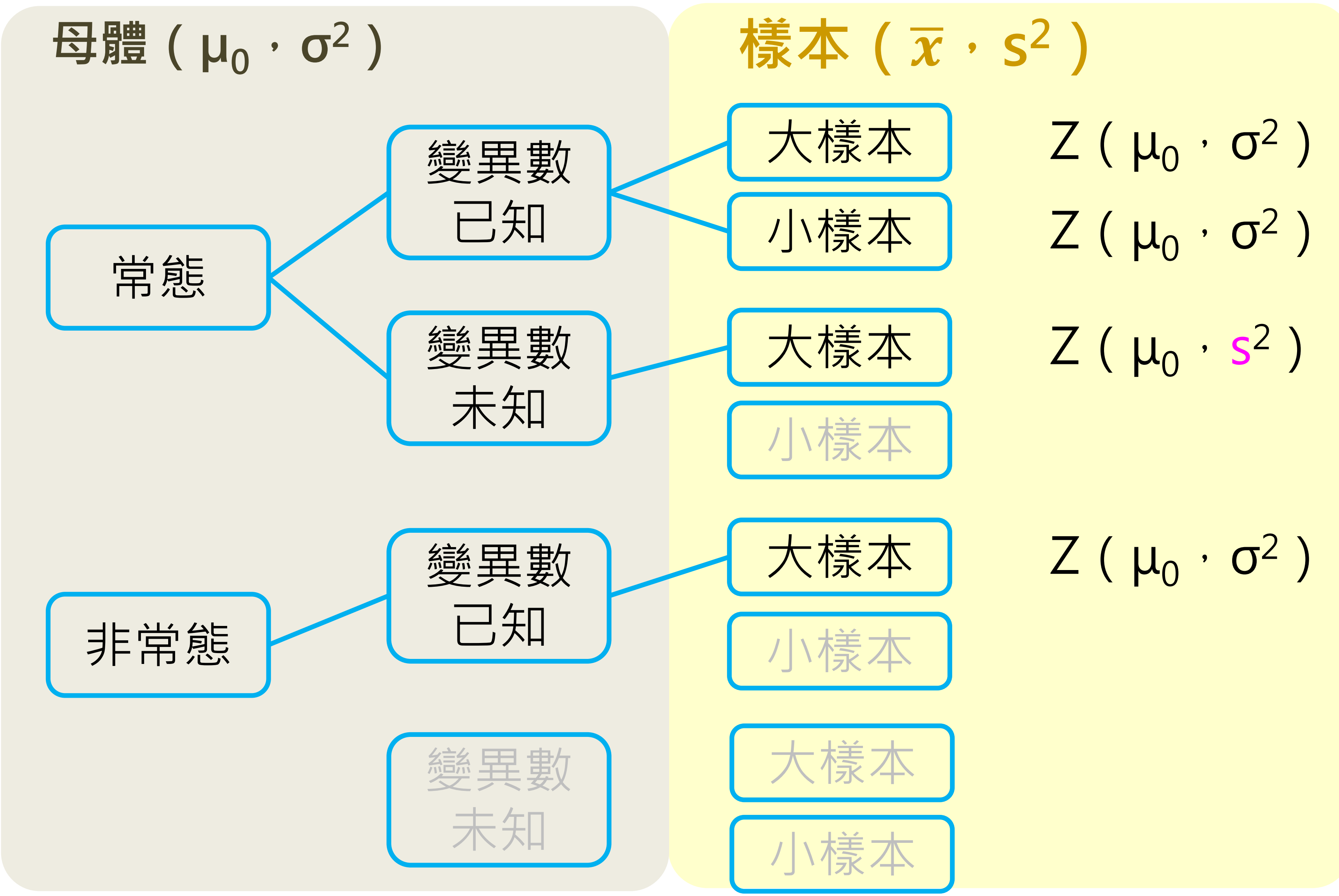
母體平均數μ

$\bar{x}$

- 大樣本
  - 母體變異數已知 — Z檢定（σ^2）
  - 母體變異數未知 — Z檢定（s^2）
- 小樣本 — 母體為常態
  - 母體變異數已知 — Z檢定（σ^2）
  - 母體變異數未知 — t 檢定（s^2）

母體平均數的Z檢定

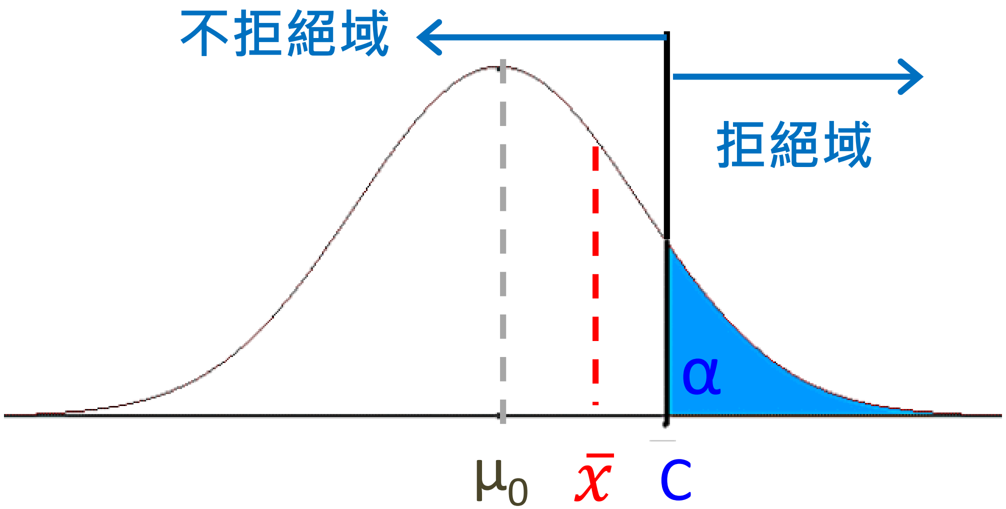
單一母體適用情境



以母體平均數的右尾檢定為例～臨界值法

假設檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$



臨界值法 → 求C 值，再與樣本平均數做比較

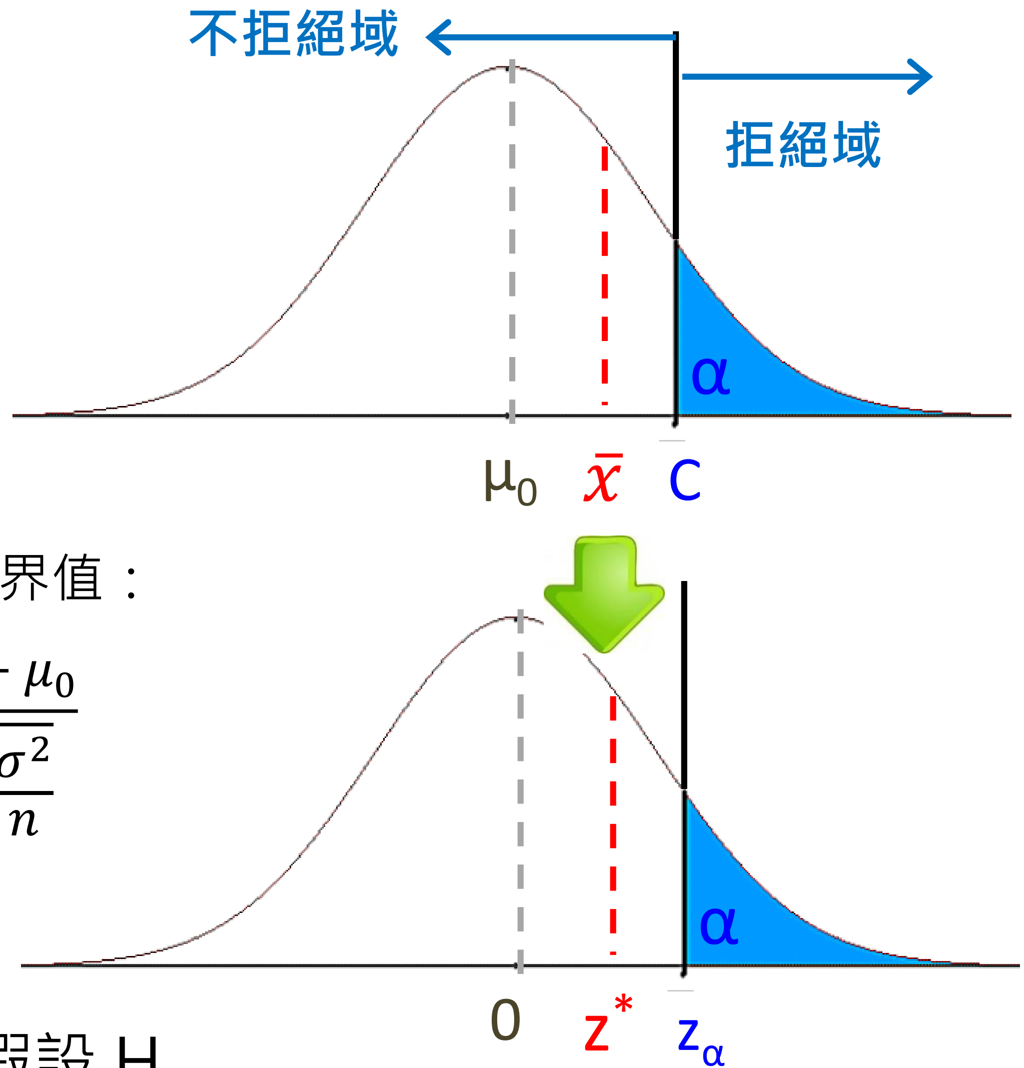
當樣本平均數 $\bar{x}$ 落在C值右邊時，表示可以拒絕H_0，所以藍色面積可列為：

$$P(\bar{x} > C) = \alpha \quad \rightarrow \quad P\left(z > \frac{C - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = \alpha \quad \rightarrow \quad C = \mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

檢定的決策

若 $\bar{x} > C$ ，則拒絕虛無假設 H

以母體平均數的<u>右尾檢定</u>為例～標準檢定法



假設檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

標準檢定法 → 將各數值轉換為<u>標準常態分配</u>再做比較

檢定統計量：

$$z^* = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

標準常態臨界值：

$$z_\alpha = \frac{C-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

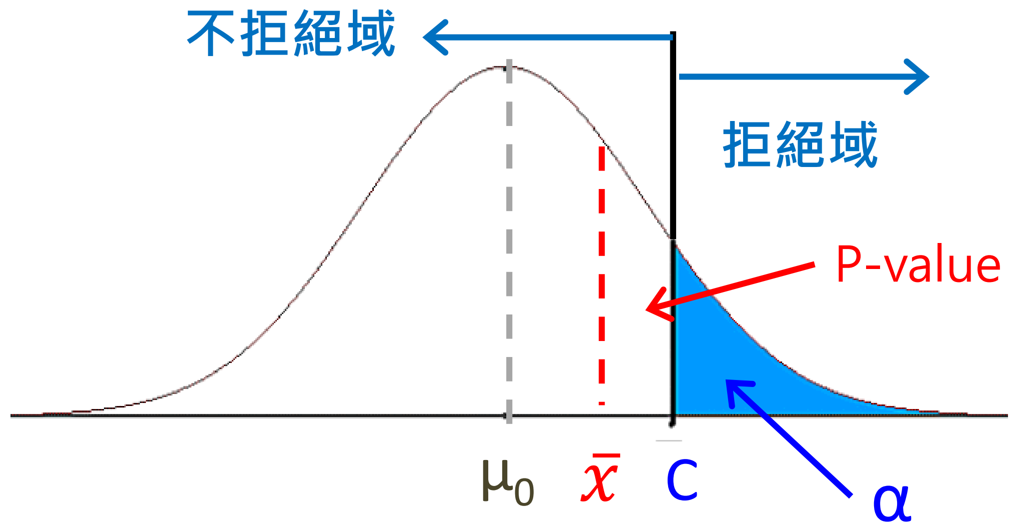
檢定的決策

若 $z^* > z_\alpha$，則拒絕虛無假設 H_0

以母體平均數的右尾檢定為例～P值法

假設檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$



P值法(右尾) → 求出檢定統計量 x̄ 在以母體平均數μ_0為中央之抽樣分配右邊的機率(面積)

計算檢定統計量 x̄ 右方(右尾)的機率(面積)：

$$P_{\text{value}} = P(z > z^*) = P\left(z > \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$$

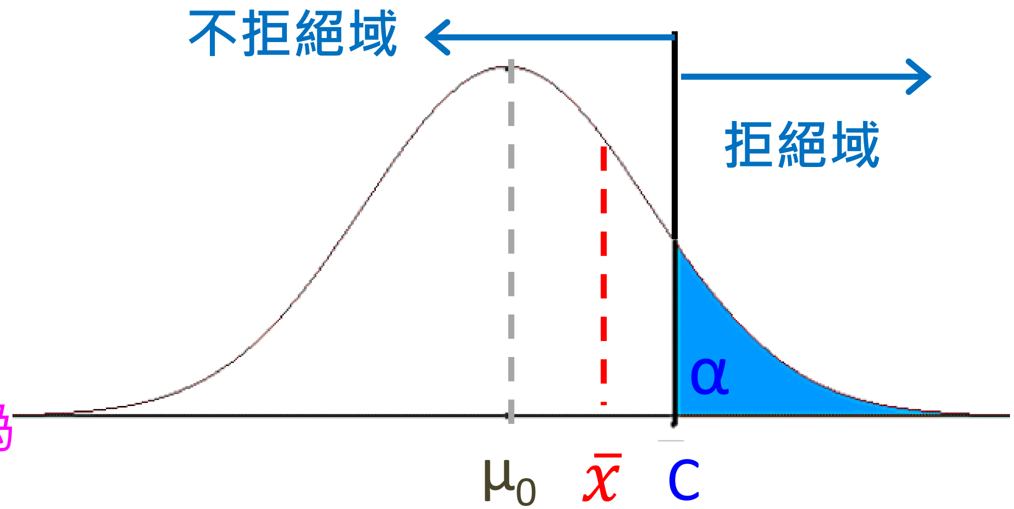
檢定的決策

若 $P_{\text{value}} < \alpha$，則拒絕虛無假設 H_0

以母體平均數的右尾檢定為例～信賴區間法

假設檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



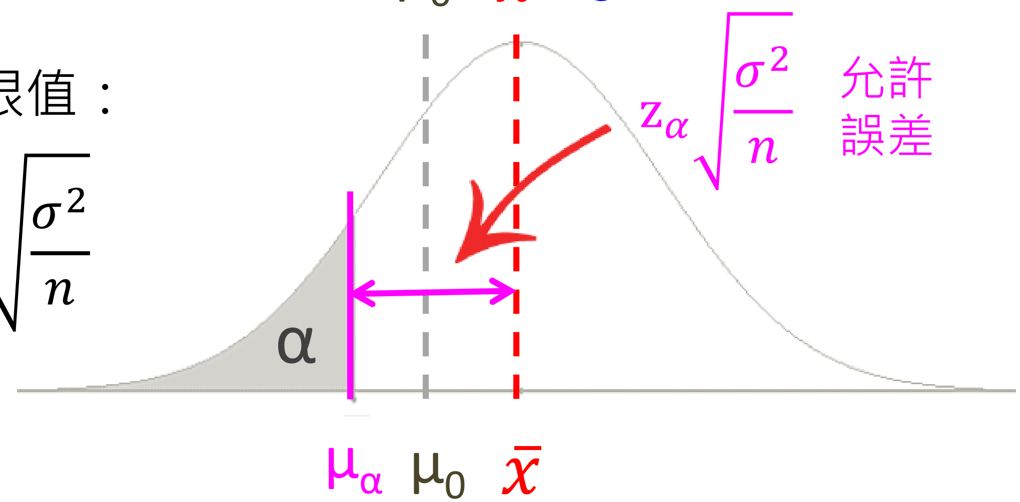
信賴區間法 → 利用檢定統計量 x̄ 的信賴區間，來作為檢定決策

$\bar{x}$ 的信賴區間：

$$\mu \geq \bar{x} - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

➔ 信賴區間下限值：

$$\mu_\alpha = \bar{x} - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

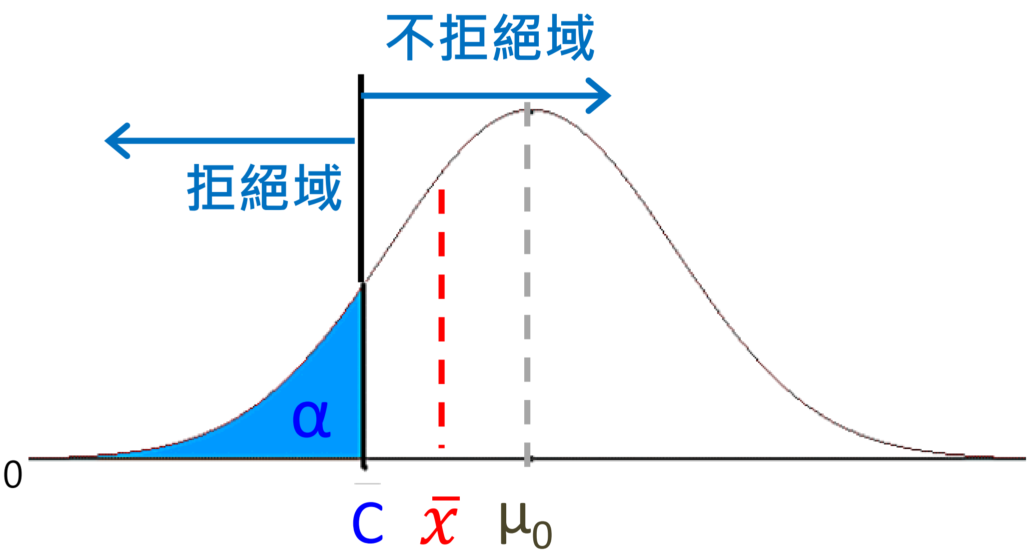


檢定的決策

若 μ_0 落在信賴區間外($\mu_0 < \mu_\alpha$)，則拒絕虛無假設 H_0

母體平均數的左尾檢定

假設檢定
$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$



臨界值法：

$$\mathrm{C} = \mu_0 - \mathrm{z}_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}}$$

若 $\bar{x} < C$，則拒絕虛無假設 H_0

標準檢定法：

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

若 $z^* < -z_\alpha$，則拒絕虛無假設 H_0

P值法(左尾)：

$$\mathrm{P_{value}} = \mathrm{P}(\mathrm{z} < \mathrm{z}^*)$$

若 $P_{value} < \alpha$，則拒絕虛無假設 H_0

信賴區間法：

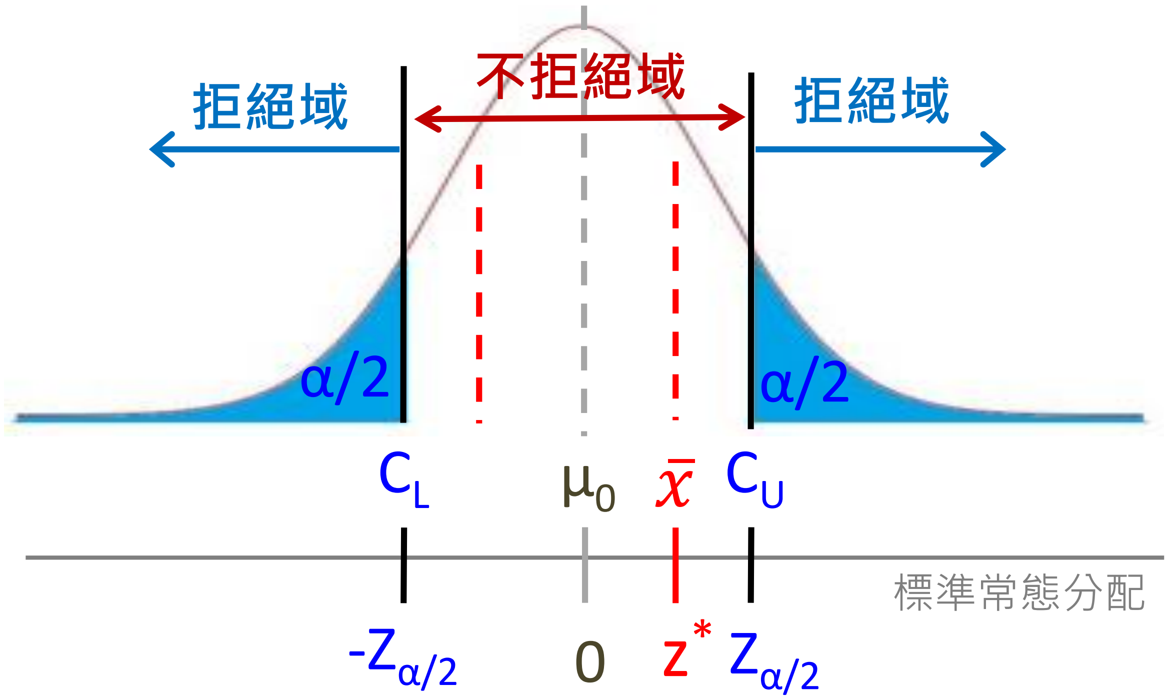
$$\mu \geq \bar{x} + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

若 μ_0 落在信賴區間外($\mu_0 > \mu_\alpha$)，
則拒絕虛無假設 H_0

母體平均數的雙尾檢定

假設檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



臨界值法：

$$C_L = \mu_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$C_U = \mu_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

若 $\bar{x} < C_L$ 或 $\bar{x} > C_U$ ，
則拒絕虛無假設 H_0

標準檢定法：

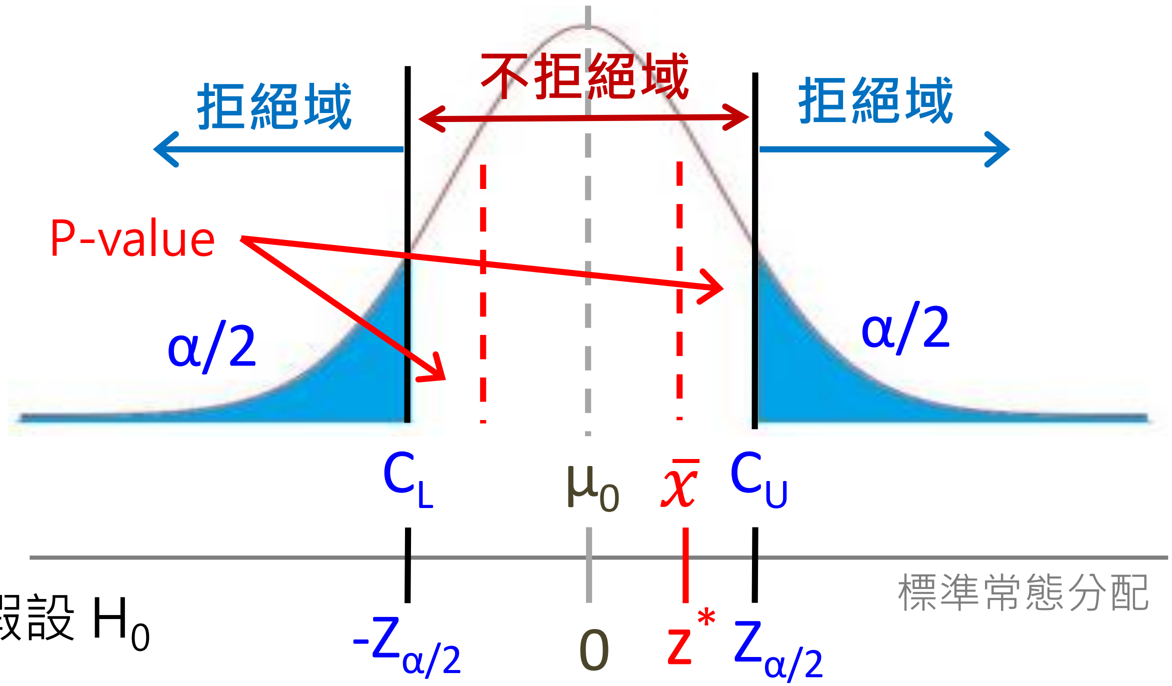
$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \qquad z_{\alpha/2} = \frac{C_{\alpha/2} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

若 $|z^*| < z_{\alpha/2}$ ，則拒絕虛無假設 H_0

母體平均數的雙尾檢定

假設檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



P值法(雙尾)：

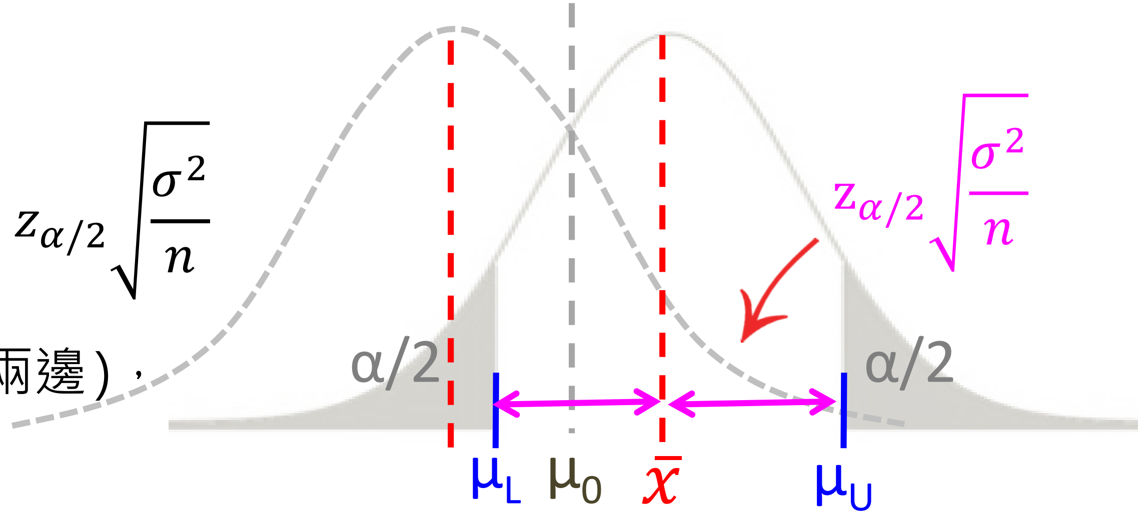
計算兩個拒絕域的面積

$$P_{value} = 2 \times P(z > |z^*|)$$

若 $P_{value} < \alpha$，則拒絕虛無假設 H_0

信賴區間法 ：

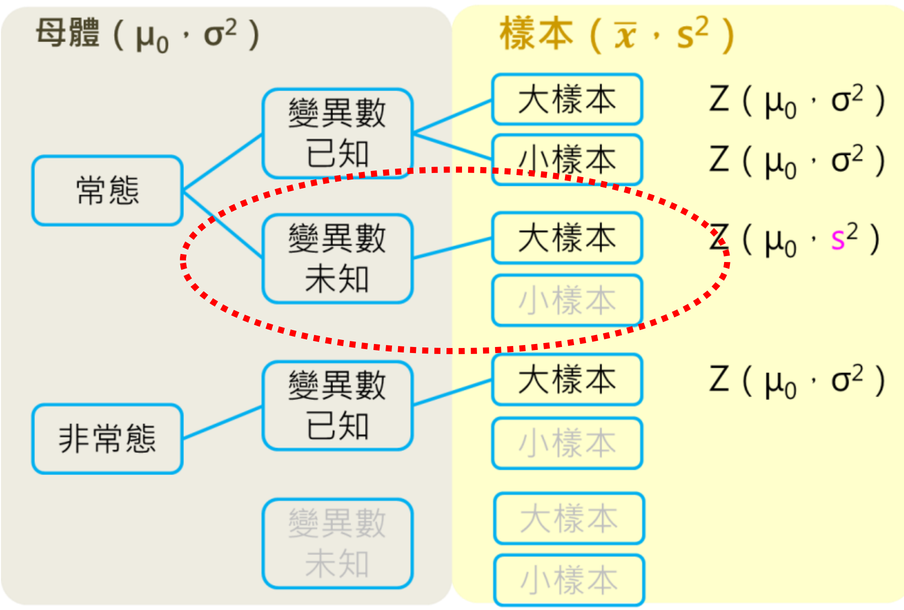
$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$



若μ_0落在信賴區間外(落在兩邊)，
則拒絕虛無假設 H_0

Z檢定小結

單一母體適用情境



若變異數σ^2未知且大樣本，可用樣本變異數 s^2 取代 σ^2，其餘檢定計算與決策原則都相同

單一母體適用情境（取回不放回且為有限母體）

若遇到抽樣方式是取回不放回，且為有限母體（$\frac{n}{N} > 0.05$），則檢定計算中，在變異數部分必須加上「有限母體修正項」

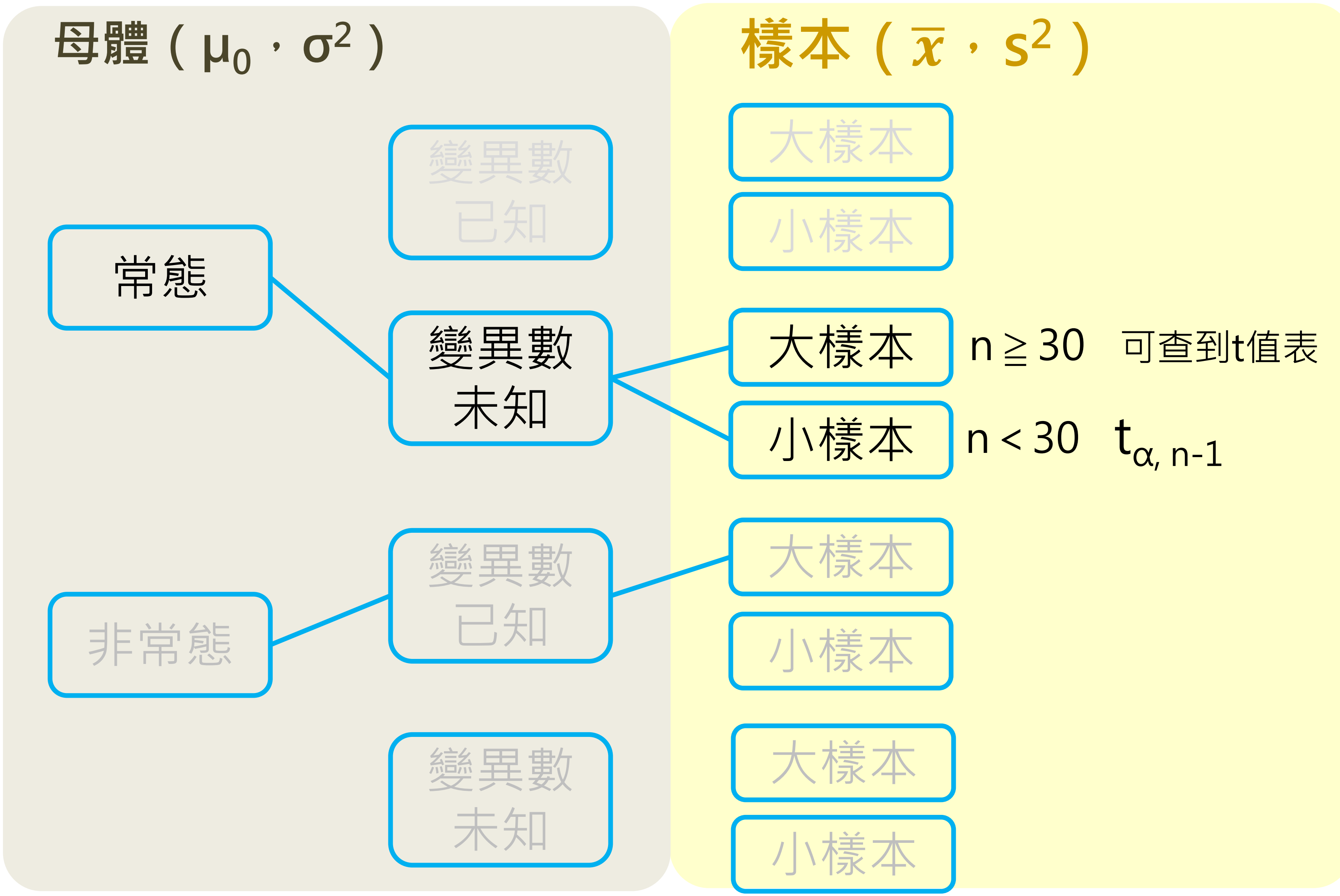
$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \xrightarrow{\text{修正項}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{n}} \xrightarrow{\text{修正項}} \sqrt{\frac{s^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

其餘檢定計算與決策原則都相同

母體平均數的 t 檢定

單一母體適用情境



母體平均數的 t 檢定

拒絕H_0決策	右尾檢定 $(H_0：\mu \le \mu_0)$	左尾檢定 $(H_0：\mu \ge \mu_0)$	雙尾檢定 $(H_0：\mu = \mu_0)$
臨界值法	$C = \mu_0 + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ 若 $\bar{x} > C$，拒絕H_0	$C = \mu_0 - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ 若 $\bar{x} < C$，拒絕H_0	$C_L = \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ $C_U = \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ 若 $\bar{x} < C_L$ 或 $\bar{x} > C_U$，拒絕 H_0
標準檢定法	$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ 若 $t^* > t_{\alpha,n-1}$，拒絕H_0	$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ 若 $t^* < -t_{\alpha,n-1}$，拒絕H_0	$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ 若 $\|t^*\| < t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，拒絕$H_0$

母體平均數的 t 檢定

拒絕H_0決策	右尾檢定 $(H_0：\mu \leq \mu_0)$	左尾檢定 $(H_0：\mu \geq \mu_0)$	雙尾檢定 $(H_0：\mu = \mu_0)$
P值法	$P_{value} = P(t_{n-1} > t^*)$ 若 $P_{value} < \alpha$，拒絕H_0	$P_{value} = P(t_{n-1} < t^*)$ 若 $P_{value} < \alpha$，拒絕H_0	$P_{value} = 2P(t_{n-1} > \lvert t^* \rvert)$ 若 $P_{value} < \alpha$，拒H_0
信賴區間法	$\mu \geq \bar{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ 若 μ_0 落在信賴區間外，拒絕H_0	$\mu \leqq \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ 若 μ_0 落在信賴區間外，拒絕H_0	$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ 若 μ_0 落在信賴區間外，拒絕H_0

案例1

某小學的年度預算報告中指出，即將啟用的行政大樓平均每月維修費為24萬。為了瞭解這筆預算之合適度，教育部隨機抽取10棟與此行政大樓相似的建築物，求得其每月維修費用之平均值為22萬。假設每月維修費用為常態分配，且已知 $\sigma = 6$ ，則在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，此預算是否合理？

「現代統計學」p177，吳柏林 著，五南圖書

案例1 解說

令μ為行政大樓平均每月維修管理費用：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0: \mu = 24 \\ H_1: \mu \neq 24 \end{cases}$

(2)母體常態→已知σ = 6，α = 0.05 → 採用「Z檢定」

(3)採雙尾檢定 → α=0.05 → $Z_{0.025}$=1.96

→臨界值C = ±1.96

(4) $\bar{x} = 22$ ，所以檢定統計量 $Z^* = \frac{\bar{x}-24}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{22-24}{6/\sqrt{10}} = -1.05$

Z^* = -1.05 > -1.96

→檢定統計量接受虛無假設H_0，表示預算合理

案例2

某政府機關宣稱，以嚴格邀求所屬人員每年平均出差不超過8天，但在野黨立法委員提出質疑該部門執行不力。立委之助理於是就去年該機關所屬人員中，隨機抽取15人進行調查，發現平均出差天數為10天，假設該機關每年出差天數服從常態分配N（8, 2^2），則在顯著水準α = 0.05下，該政府機關所屬人員每年出差天數要求是否執行不力？

「現代統計學」p178，吳柏林 著，五南圖書

案例2 解說

令μ為某部門所屬員工每年平均出差天數：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\mu \leq\ 8 \\ H_1：\mu >\ 8 \end{cases}$

(2)母體常態→已知σ＝2，α＝0.05 → 採用「Z檢定」

(3)採右尾檢定 → α=0.05 → $Z_{0.05}$=臨界值C＝ 1.645

(4) $\bar{x} = 10$ ，檢定統計量 $Z^* = \frac{\bar{x}-8}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10-8}{2/\sqrt{15}} = 3.87 > 1.645$

→檢定統計量拒絕虛無假設H_0，表示對於每年出差天數要求執行不力。

案例3

某罐頭工廠生產部宣稱，每日出產的鳳梨罐頭產量服從常態分配N（3600，σ^2），σ未知，其總經理發現最近有減產現象，為實際瞭解平均每日產量，於是自每日產量的紀錄中隨機抽取20天，得到樣本平均產量為3500箱，標準差為180箱。試問，在顯著水準$\alpha = 0.05$下，是否該罐頭工廠出產的鳳梨罐頭有減產現象？

「現代統計學」p178，吳柏林 著，五南圖書

案例3 解說

令μ為罐頭工廠平均每日鳳梨管頭產量：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\mu \geq\ 3600 \\ H_1：\mu <\ 3600 \end{cases}$

(2)母體常態→但σ未知 → 可採用「t檢定」

(3)採<u>左尾檢定</u>→ α=0.05 → $t_{0.05,\ 19}$=臨界值C＝ 1.729

(4) $\bar{x} = 3500$ ，檢定統計量

$$t^* = \frac{\bar{x}-3600}{s/\sqrt{n}} = \frac{3500-3600}{180/\sqrt{20}} = -2.485 < -1.729$$

→檢定統計量<u>拒絕</u>虛無假設H_0，表示鳳梨罐頭產量最近確有減產現象。

一個母體比例的假設檢定

常見的檢定適用情境

母體比例p

$\hat{p}$ — 大樣本

- 無限母體或取出放回 — Z檢定
- 有限母體且取出不放回 — Z檢定(需用「修正因子」$\frac{N-n}{N-1}$ 調整)

滿足 np $\geq$ 5 且 n(1-p) $\geq$ 5 ，即為〝大樣本〞

母體比例的z檢定

拒絕H_0決策	右尾檢定 $(H_0: p \le p_0)$	左尾檢定 $(H_0: p \ge p_0)$	雙尾檢定 $(H_0: p = p_0)$
臨界值法	$C = p_0 + z_{\alpha,}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ 若 $\hat{p} > C$，拒絕H_0	$C = p_0 - z_{\alpha,}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ 若 $\hat{p} < C$，拒絕H_0	$C_L = p_0 - z_{\alpha,}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ $C_U = p_0 + z_{\alpha,}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ 若 $\hat{p} < C_L$ 或$\hat{p} > C_U$，拒絕 H_0
標準檢定法	$z^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$ 若 $z^* > z_{\alpha,}$，拒絕H_0	$z^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$ 若 $z^* < -z_{\alpha,}$，拒絕H_0	$z^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$ 若 $\|z^*\| < z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕$H_0$

$\hat{p}$ 為樣本比例；$q_0 = 1 - p_0$

母體比例的z檢定

拒絕H_0決策	右尾檢定 $(H_0：\mu \le \mu_0)$	左尾檢定 $(H_0：\mu \ge \mu_0)$	雙尾檢定 $(H_0：\mu = \mu_0)$
P值法	$P_{value} = P(z > z^*)$ 若 $P_{value} < \alpha$，拒絕H_0	$P_{value} = P(z < z^*)$ 若 $P_{value} < \alpha$，拒絕H_0	$P_{value} = 2P(z > \lvert z^*\rvert)$ 若 $P_{value} < \alpha$，拒H_0
信賴區間法	$p \ge \hat{p} - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 若 p_0 落在信賴區間外，拒絕H_0	$p \ge \hat{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 若 p_0 落在信賴區間外，拒絕H_0	$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 若 p_0 落在信賴區間外，拒絕H_0

$\hat{p}$ 為樣本比例；$q_0 = 1 - p_0$

案例4

某燈管公司最近從南韓進口一批藝術燈管，對方品管部保證不良率p在5%以下，經過海運半個月後在基隆通關驗貨。燈管公司檢驗人員從該批藝術燈管中取出144件做檢定，發現有12件為不良品。假設貨運過程對產品毫無影響，試問在顯著水準$\alpha = 0.05$下，是否接受不良率p在5%以下的保證？

「現代統計學」p186，吳柏林 著，五南圖書

案例4 解說

令p為藝術燈管不良率：

(1)建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\mathrm{p} \leq \ 0.05 \\ H_1：\mathrm{p} > \ 0.05 \end{cases}$

(2)樣本比例$\hat{\mathrm{p}} = \frac{12}{144} = 0.083 \rightarrow$ 因屬大樣本，可採「z檢定」

(3)採右尾檢定 → α=0.05 → $z_{0.05}$=臨界值C = 1.64

(4)檢定統計量 $\mathrm{z}^* = \frac{\hat{\mathrm{p}}-\mathrm{p}}{\sqrt{\frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{\mathrm{n}}}} = \frac{0.083-0.05}{\sqrt{\frac{0.05(1-0.05)}{144}}} = 1.82 > 1.64$

→檢定統計量拒絕虛無假設H_0，表示拒絕對方保證此批藝術燈管不良率p在5%以下的宣稱。

一個母體變異數的假設檢定

常見的檢定適用情境

母體變異數σ^2

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

s^2 檢定統計量，
卡方檢定(df=n-1)

有時，瞭解每個數值間的差異性比知道平均數是多少更重要（例如螺絲與螺帽的直徑差異），所以有興趣的會是母體變異數的檢定，而非平均數，此時可利用卡方分配來作為變異數的檢定。

母體變異數的右尾檢定

假設檢定
$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

臨界值法 → 求C 值，再與樣本變異數做比較

藍色面積可列為： $P(\hat{s}^2 > C) = \alpha$

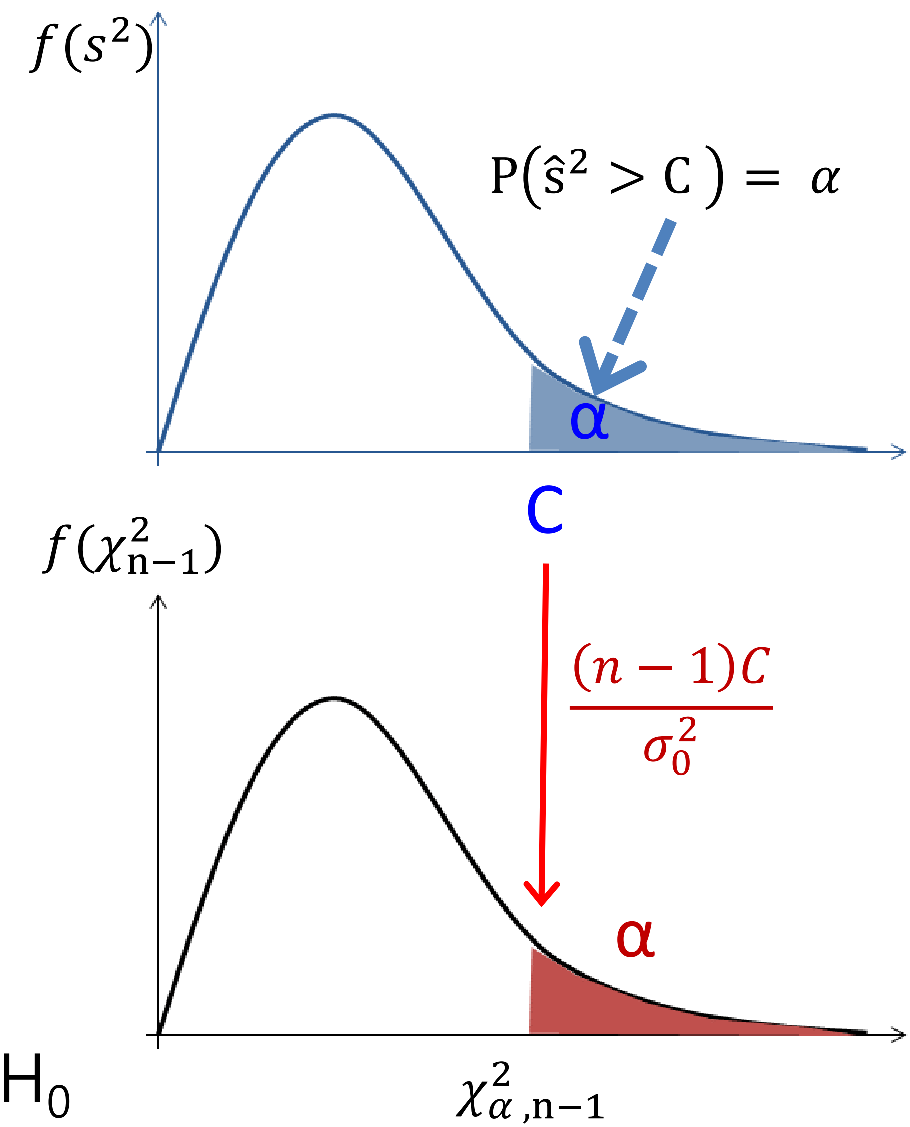
$$\rightarrow P\left(\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)C}{\sigma_0^2}\right) = \alpha$$

$$\rightarrow P\left(\chi^2_{\alpha,n-1} > \frac{(n-1)C}{\sigma_0^2}\right) = \alpha$$

$$\rightarrow C = \frac{\chi^2_{\alpha,n-1}\,\sigma_0^2}{n-1}$$

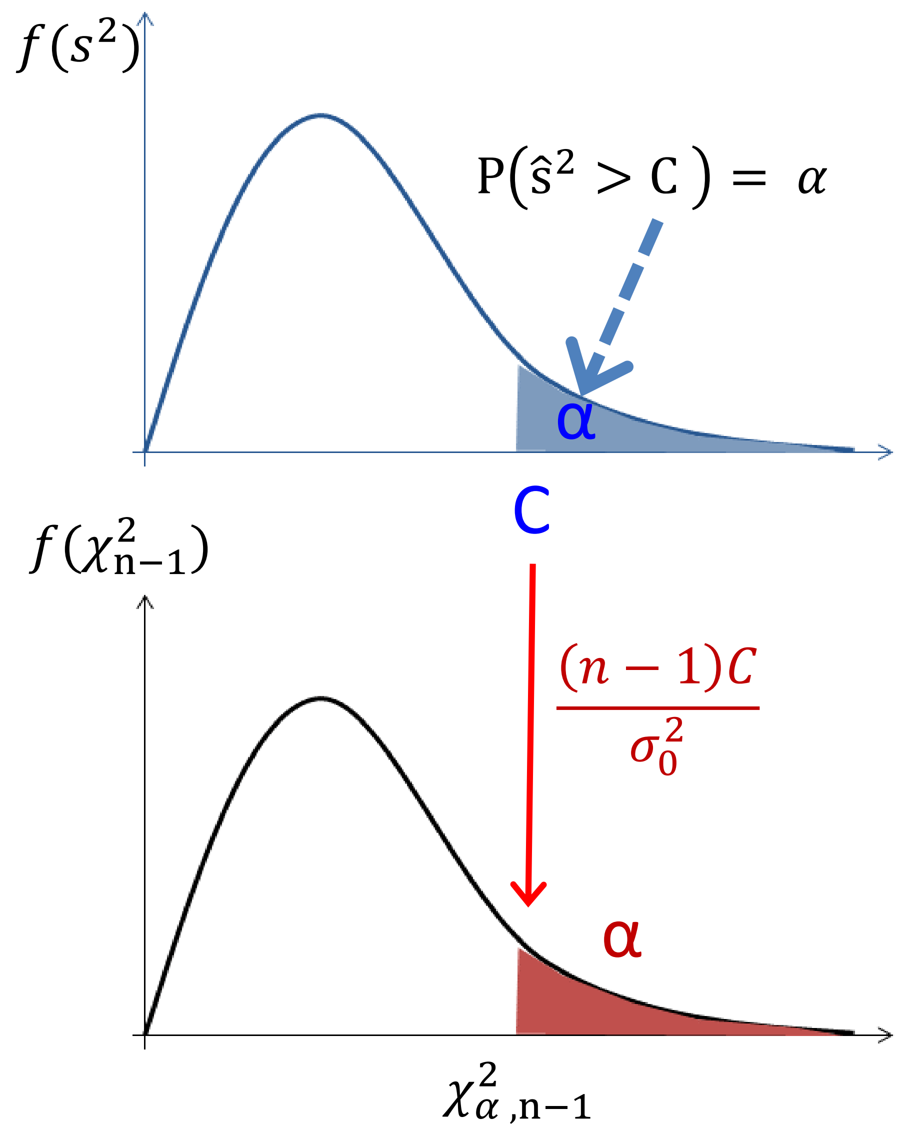
檢定的決策

若 $s^2 > C$ ，則拒絕虛無假設 H_0



母體變異數的右尾檢定

假設檢定
$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$



標準檢定法：

檢定統計量： $\chi^{2*} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

若 $\chi^{2*} > \chi^2_{\alpha,n-1}$ ，則拒絕虛無假設 H_0

P值法(右尾)：

$$P_{value} = P(\chi^2_{n-1} > \chi^{2*})$$

若 $P_{value} < \alpha$，則拒絕虛無假設 H_0

母體變異數的左尾與雙尾檢定

左尾假設檢定

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

臨界值法

臨界值： $C = \dfrac{\chi^2_{1-\alpha,n-1}\,\sigma_0^2}{n-1}$

若 $s^2 < C$ ，則拒絕 H_0

標準檢定法：

檢定統計量： $\chi^{2*} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

若 $\chi^{2*} < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$ ，則 H_0

P值法(右尾)：

$P_{value} = P\left(\chi^2_{n-1} < \chi^{2*}\right)$

若 $P_{value} < \alpha$，則拒絕 H_0

雙尾假設檢定

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

臨界值法

臨界值：$C_L = \dfrac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\,\sigma_0^2}{n-1}$ $C_U = \dfrac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}\,\sigma_0^2}{n-1}$

若 $s^2 < C_L$ 或 $s^2 > C_U$ ，則拒絕 H_0

標準檢定法：

檢定統計量： $\chi^{2*} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

若 $\chi^{2*} < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$或$\chi^{2*} > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$，則拒絕 H_0

P值法(右尾)：

$P_{value} = 2P\left(\chi^2_{n-1} < \chi^{2*}\right)$

若 $P_{value} < \alpha$，則拒絕 H_0

案例5

一個螺絲製造工廠依規定生產螺帽的變異數不可以超過0.03英吋^2，否則會造成無法鎖緊或無法鎖住的問題。此工廠宣稱他們所生產的螺帽符合這樣的規定，現隨機抽取此工廠所生產的螺帽12個，發現其變異數為0.042英吋^2。請以顯著水準α=0.05的條件檢定此工廠的宣稱是否真實？

「應用統計學 二版」p282，李德治、童惠玲，博碩文化

案例5解說

(1)根據題意，建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\sigma^2 \leq \ 0.03 \\ H_1：\sigma^2 > \ 0.03 \end{cases}$

(2)利用<u>標準檢定法</u>來做檢定

(3)採<u>右尾檢定</u> → α=0.05 → $\chi^2_{0.05,11}$ = 19.675

(4)檢定統計量 $\chi^{2*} = \frac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(12-1)\times 0.042}{0.03} = 15.4 < 19.675$

→檢定統計量<u>不拒絕</u>虛無假設H_0，表示此工廠的宣稱正確。

案例6

在倉庫存貨控制中，有一個主要的考量因素就是消費者對於產品每日需求量的變異程度。存貨控管部門根據經驗，相信消費者對產品每日需求量呈現常態分布，且變異數為250。如今隨機抽取25天的銷售紀錄，得到如下資料：樣本平均數為50.6，樣本變異數為500，試問在顯著水準α=0.1下，是否有足夠之證據說明存貨控管部門的經驗想法是對的？

「現代統計學」p183，吳柏林 著，五南圖書

案例6 解說

(1)根據題意，建立假設檢定 $\begin{cases} H_0：\sigma^2 = 250 \\ H_1：\sigma^2 \neq 250 \end{cases}$

(2)母體常態→已知$\bar{x} = 50.6$，$S^2 = 500$ →採用「卡方χ^2檢定」

(3)採雙尾檢定，用標準檢定法 → $\alpha/2 = 0.05$ →
兩個檢定量臨界值為 $\chi^2_{0.95,\,24} = 13.8$，$\chi^2_{0.05,\,24} = 36.4$

(4) 所以檢定統計量 $\chi^{2*} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\times 500}{250} = 48$

$\chi^{2*} = 48 > 36.4$

→ 拒絕虛無假設H_0，表示存貨部門的經驗想法是不正確的。

The End