Estimation
~ Point Estimation ~

估計概念與點估計

估計(estimation)
基本概念

點估計與區間估計

點估計（point estimation）

〝估計〞也稱為「推估」，是指利用樣本統計量來推測母體中未知母體的方法。所謂的「點估計」是由一組隨機樣本數 n 中，計算此n個樣本的統計量，例如 $\bar{x}$ 與 s。所以「點估計」會關注的是統計量是否能有效代表母體。

區間估計（interval estimation）

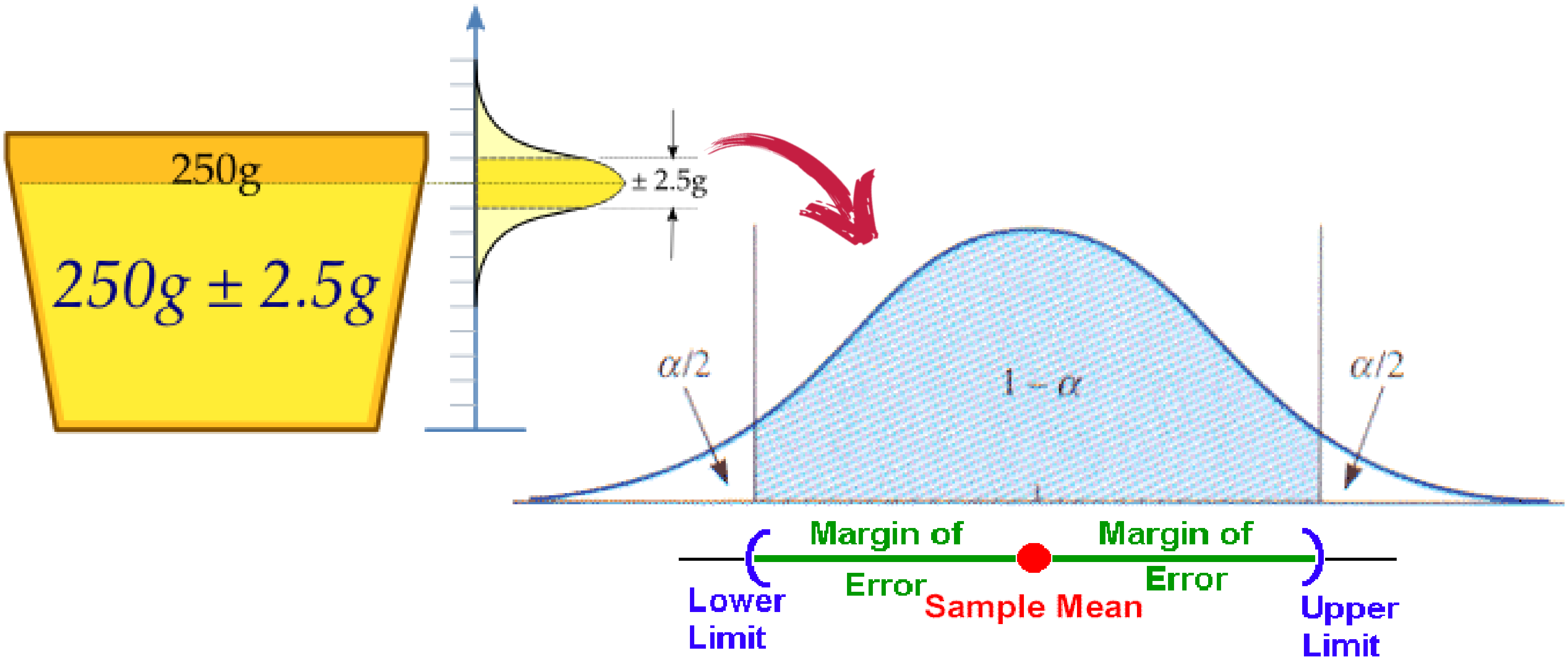
以樣本估計母體時，所產生的估計值為一個區間的形式。通常給定一個「信賴水準」（confidence level）的標準，瞭解在此水準下所形成的估計區間，以此範圍來推估母體參數的信心或可靠度範圍。所以區間估計是以〝範圍〞來推估母體參數會落在的區域。

常見的估計

點估計 (point estimation)

$$\bar{x} \longmapsto \mu \qquad s \longmapsto \sigma \qquad \hat{p} \longmapsto p$$

區間估計 (interval estimation)



Point Estimation

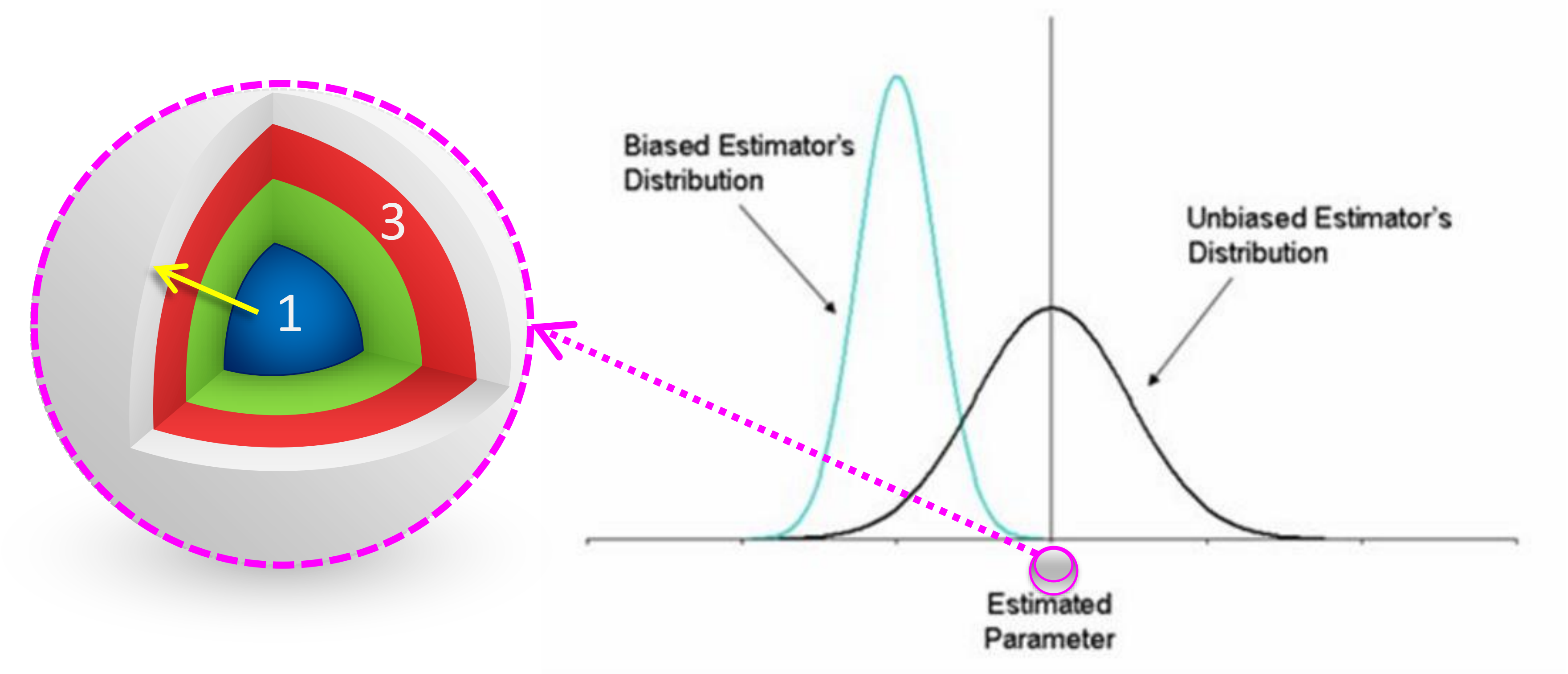
點估計

點估計常用的樣本統計量

Par.	Statistics	Point Estimators
Mean μ	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$\bar{x}$
Variance σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	s^2
Proportion p	$\hat{P} = \frac{X}{n}$	$\hat{p}$
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}{n_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}}{n_2}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
$p_1 - p_2$	$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

圖片來源： https://onlinecourses.science.psu.edu/stat857/node/34

點估計的建議步驟與應用目的



選擇樣本

選擇具有代表性的樣本

選擇「樣本統計量」計算方式

適合的計算可以有效的推估母體

根據抽樣結果計算樣本統計量

將抽樣出來的數值計算求得樣本統計量

推論母體，做決策

根據所求得的推論值來做判斷、決策

點估計的判斷標準

不偏性（unbiasedness）

- 最小變異不偏性（best unbiasedness）
- 漸進不偏性（asymptotic unbiasedness）

有效性（efficiency）

- 絕對有效性
- 相對有效性

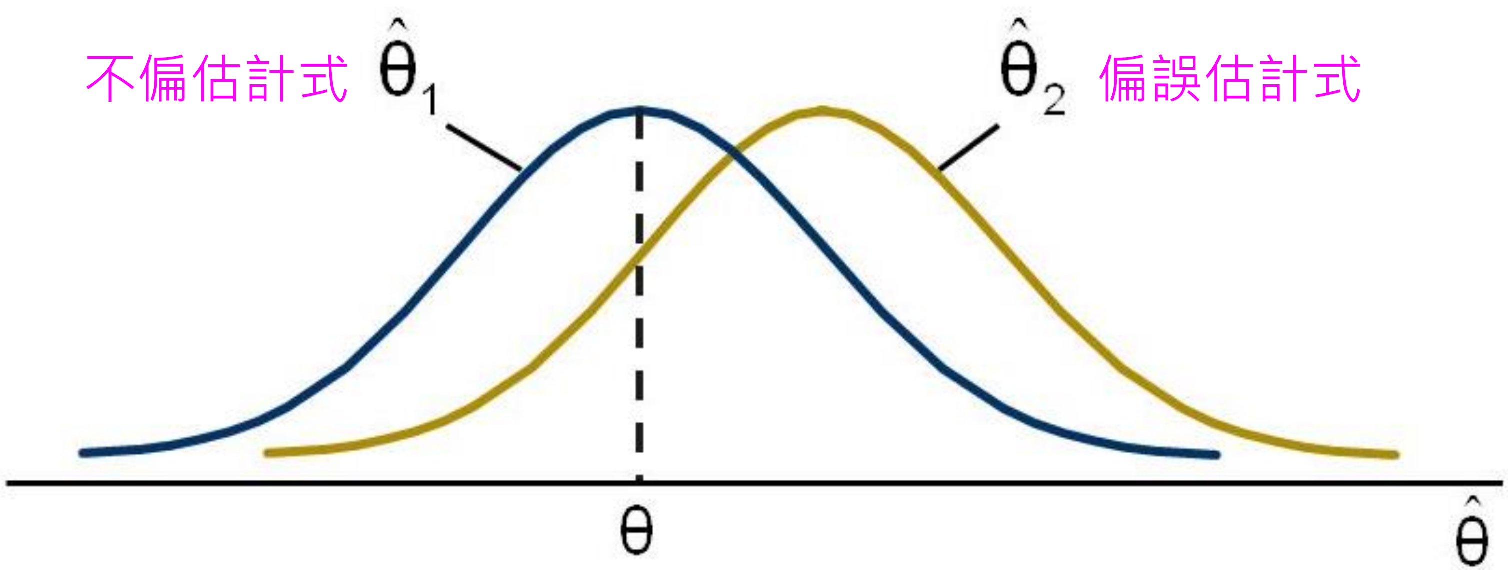
一致性（consistency）

充分性（sufficiency）

不偏性（unbiasedness）

若是〝樣本估計量〞（統一由 $\hat{\theta}_n$ 來代表）的期望值剛好等於母體參數，則可稱 $\hat{\theta}_n$ 為「不偏性」：

$E(\hat{\theta}_n) = \theta$,（「θ」為母體參數的統稱）



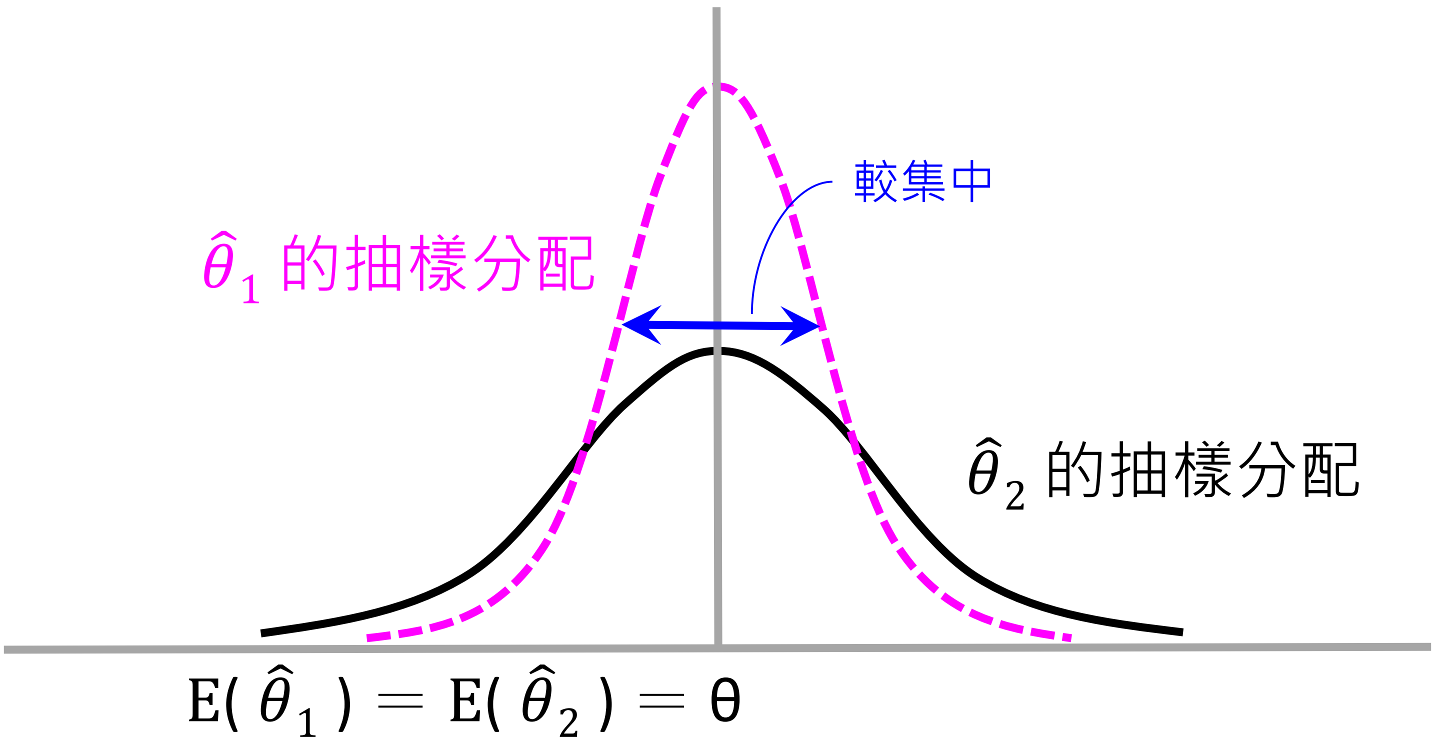
不偏估計式

估計	樣本取出放回	樣本取出不放回
$\bar{x} \longmapsto \mu$	不偏	不偏
$s \longmapsto \sigma$	偏誤	偏誤
$s^2 \longmapsto \sigma^2$	不偏	偏誤
$\hat{p} \longmapsto p$	不偏	不偏
$\hat{p}\hat{q} \longmapsto pq$	偏誤	偏誤
$\hat{p}_1 - \hat{p}_1 \longmapsto p_1 - p_2$	不偏	不偏

資料來源：「統計學 二版」p12-5，李德治、林孟儒、童惠玲 著，博碩文化

有效性（efficiency）

若是有一個以上的〝不偏估計量〞，想要從中挑選一個較佳的估計式來推論母體，則「有效性」可以最為評估的準則方式之一。如下，假設$\hat{\theta}_1$與$\hat{\theta}_2$都是θ的不偏估計量，但是$\hat{\theta}_1$比較集中，因此在推估母體的θ時，採用$\hat{\theta}_1$的估計量會有較小的誤差。所以衡量抽樣分配集中程度的標準稱為「有效性」：



有效性的衡量方式

絕對有效性

假設 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 多個的估計量，計算各個 $\hat{\theta}_n$的「平均平方差」（以MSE($\hat{\theta}_n$)表示），若 $\hat{\theta}$ 為所有估計值的最小值，則可稱 $\hat{\theta}$ 為估計 θ 時具有的「絕對有效性」：

計算各 MSE($\hat{\theta}_n$) $= E\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right]$

→ (取最小值：$\hat{\theta}$) → 以 $\hat{\theta}$ 估計 θ

相對有效性

當兩數趨近於0，或是∞時（就是數值很大時），利用 $\frac{b}{a}$ 是否大於1來判斷兩數大小可能比較容易。所以「相對有效性」就是比較 $\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$ 時，利用 $\frac{b}{a}$ 方式來取得較小值，用以作為 θ 的估計量：

計算 $\dfrac{\text{MSE}(\hat{\theta}_1)}{\text{MSE}(\hat{\theta}_2)} < 1$ → $\hat{\theta}_1$比 $\hat{\theta}_2$ 小

→ $\hat{\theta}_1$ 具有相對有效性 → 以$\hat{\theta}_1$估計 θ

一致性（consistency）

當樣本增加時，若所取之估計值接近母體參數的機率也增加，則具有此性質的估計值，就稱之為具有一致性。對於一致性的要求有兩種：

一致性的強則

假設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 時之 θ 的估計量，若滿足：

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta\right) = 1$$ 則稱 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 的一致估計量。

一致性的弱則

假設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 時之 θ 的估計量，若滿足：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1, \forall\varepsilon > 0, \varepsilon\text{為任意小誤差值}$$

則稱 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 的一致估計量。

充分性（sufficiency）

若一組所抽樣的樣本，其相關「分配」與母體參數無關，則此樣本所計算的統計量，就稱為「充分統計量」（sufficient statistic），例如：

$\bar{x}$（樣本平均數）$=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 其值不會因為母體平均數 μ 變動而變大或變小，

所以 $\bar{x}$ 為 μ 的「充分統計量」。

案例

某候選人在選舉前舉辦民意調查，隨機抽選1000位選民當樣本，詢問選民對自己的支持度，結果詢問的結果有350位的選民願意支持該候選人，請問該候選人的支持率的點估計值為多少？

「應用統計學 二版」p221，李德治、童惠玲 著，博碩文化

案例解說

隨機抽選1000位 → N=1000 ；
有350位支持 → n = 350

問「點估計」，所以要從已獲得的資訊中，計算一個統計量可以推估母體

$$\hat{p} = \frac{350}{1000} = 35\%$$

所以支持率的點估計值為 <u>35%</u>

案例

假設由一個具有期望值 μ ，變異數σ^2的母體中隨機抽取 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 五個樣本，試問下列四個估計式，何者是 μ 的不偏估計量？

(1) $\hat{\theta}_1 = x_1$

(3) $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(x_1 + 2x_5)$

(2) $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_5)$

(4) $\hat{\theta}_4 = \bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$

案例解說

不偏估計量 → 利用 E ($\hat{\theta}_{\mathrm{n}}$) = μ 是否成立來判斷；

(1) $\mathrm{E}(\hat{\theta}_1) = \mathrm{E}(x_1) = \mu$

(2) $\mathrm{E}(\hat{\theta}_2) = \mathrm{E}(\frac{1}{2}(x_1 + x_5)) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(\mathrm{x}_1) + \mathrm{E}(\mathrm{x}_2)) = \mu$

(3) $\mathrm{E}(\hat{\theta}_3) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}(x_1 + 2x_5)\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(\mathrm{x}_1) + 2\mathrm{E}(\mathrm{x}_2))$

$= \frac{3}{2}\mu$

(4) $\mathrm{E}(\hat{\theta}_4) = \mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}) = \mu$

所以 $\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$、$\hat{\theta}_4$ 是 μ 的不偏估計量

The End