多樣本的抽樣分配

兩個以上樣本的分配型態

比較兩母體樣本的差異 ～比較「比例差」

兩樣本比例差

的抽樣分配

大樣本時的樣本比率抽樣分配

如果取出的樣本數很大時，np ≧ 5 且 n(1-p) ≧ 5，
根據中央極限定理：

採取出放回或**無限母體**

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

採取出不放回且**有限母體**

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n} \times \frac{N-n}{N-1}\right)$$

大樣本時兩樣本比例差的抽樣分配

已知兩母體比例分別為p_1、p_2（母體數量各為N_1、N_2），自兩個母體分別抽取n_1、n_2個隨機樣本。假設兩樣本中成功的比例分別為 $\hat{p}_1$ 與 $\hat{p}_2$ ，且$n_1p_1 \geqq 5$ 且 $n_1(1-p_1) \geqq 5$、$n_2p_2 \geqq 5$ 且 $n_2(1-p_2) \geqq 5$，根據中央極限定理：

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \qquad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

採取出放回或**無限母體**

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2\ , \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

採取出不放回且**有限母體**

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2\ , \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} \times \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \times \frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)$$

案例

假設A工廠所生產的電視映像管不良率為0.07，B工廠所生產的電視映像管不良率為0.05。現自兩個工廠分別抽出100支映像管，試問A工廠的映像管不良率大於B工廠映像管0.01以上的機率為何？兩工廠所生產的映像管相差在0.01以上的機率又為何？

「統計學 二版」p11-37，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例解說

A、B兩工廠，各有不良率，各抽100支（開始思考……）
→不良率比較，所以是「兩樣本比例差」的議題
→100支，滿足所謂「大樣本」，可利用常態分配計算

$$\hat{p}_A \sim N\left(0.07, \frac{0.07\times0.93}{100}\right) \qquad \hat{p}_B \sim N\left(0.05, \frac{0.05\times0.95}{100}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}_A - \hat{p}_B \sim N\left(0.07-0.05, \frac{0.07\times0.93}{100}+\frac{0.05\times0.95}{100}\right)$$

(1) $P(\hat{p}_A - \hat{p}_B > 0.01) = P\left(Z > \dfrac{0.01-(0.07-0.05)}{\sqrt{\frac{0.07\times0.93}{100}+\frac{0.05\times0.95}{100}}}\right)$

$= P(Z > -0.3) = 0.6179$

(2) $P(|\hat{p}_A - \hat{p}_B| > 0.01) = P(\hat{p}_A - \hat{p}_B > 0.01) + P(\hat{p}_B - \hat{p}_A > 0.01)$

$= P\left(Z > \dfrac{0.01-(0.07-0.05)}{\sqrt{\frac{0.07\times0.93}{100}+\frac{0.05\times0.95}{100}}}\right) + P\left(Z > \dfrac{0.01-(0.05-0.07)}{\sqrt{\frac{0.07\times0.93}{100}+\frac{0.05\times0.95}{100}}}\right)$

$= P(Z > -0.3) + P(Z > 0.89) = 0.8046$

比較兩母體樣本的差異
~比較「平均數」

兩樣本平均數差
的抽樣分配

大樣本時的樣本平均數抽樣分配

當樣本數夠大時（ n ≧ 30 ），樣本平均數的抽樣分配會近似常態分配：

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{\mathrm{x}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \mu \qquad \mathrm{V}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

大樣本時的樣本平均數差抽樣分配

當樣本數 $n_1 \geqq 30$、 $n_2 \geqq 30$，兩樣本平均數差的抽樣分配：

$$\bar{x}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \qquad \bar{x}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

採取出放回或**無限母體**

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

採取出不放回且**有限母體**

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} \times \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \times \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1})$$

案例

某次考試全校平均70分，標準差10分，現隨機抽取兩組學生人數分別為30人與50人，求此兩組學生的平均分數差超過4.62分的機率為何？

「統計學 二版」p11-36，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例解說

〝某校〞，又抽樣都超過30（開始思考......）
→大樣本抽樣，根據中央極限定理知，趨近常態分配
→兩組做比較，但不知哪組分數高？所以要用「絕對值」來計算

$\bar{x}_1 \sim N(70, \frac{10^2}{30})$ $\bar{x}_2 \sim N(70, \frac{10^2}{50})$

$\Longrightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(70\text{-}70, \frac{10^2}{30} + \frac{10^2}{50})$

$$\therefore P(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 4.62)$$

$$= P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 4.62) + P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < -4.62)$$

$$= P\left(Z > \frac{4.62 - 0}{\sqrt{\frac{10^2}{30} + \frac{10^2}{50}}}\right) + P\left(Z < \frac{-4.62 - 0}{\sqrt{\frac{10^2}{30} + \frac{10^2}{50}}}\right)$$

$$= P(Z > 2) + P(Z < -2) = 0.0456$$

The End