分配的再生性
多個隨機變數的總合

reproductively

分配的「再生性」

再生性（reproductively）是指2個以上服從相同分配的隨機變數，經過加總後所形成新的隨機變數，仍然服從原機率分配。

例如假設兩個獨立隨機變數X、Y都服從某分配Dis（μ，σ^2）：

$$X \sim Dis\,(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y \sim Dis\,(\mu_{\mathrm{y}}, \sigma_{\mathrm{y}}^2)$$

$$\Rightarrow \; X + Y \sim Dis\,(\mu_{x+\mathrm{y}}, \sigma_{x+\mathrm{y}}^2)$$

其中 $\mu_{x+\mathrm{y}} = \mu_x \oplus \mu_{\mathrm{y}} \qquad \sigma_{x+\mathrm{y}}^2 = \sigma_x^2 \oplus \sigma_{\mathrm{y}}^2$

（表示是由原分配所組成的算式）

discrete distribution

離散型機率分配

二項分配的再生性

在成功與失敗的機率不變情況下，不斷重複試驗所得的機率分配函數

$$f(x) = C_{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \mathrm{p}^{\mathrm{x}}\, \mathrm{q}^{\mathrm{n-x}}\ , \mathrm{x}=0,1,..,\mathrm{n}$$

其中 p 為成功機率；

q=1-p 為失敗機率

$$\Longrightarrow\ X \sim B\,(n,p) \qquad \mathrm{E(x)} = \mathrm{np} \qquad \mathrm{V(x)} = \mathrm{np(1\text{-}p)}$$

二項分配的再生性

若 $X \sim \mathrm{B}\,(\mathrm{n}_x, \mathrm{p}) \qquad Y \sim \mathrm{B}(\mathrm{n}_{\mathrm{y}}, \mathrm{p})$

$$\Rightarrow\ X + Y \sim B(n_x + n_y, p)$$

案例

假設甲工廠自A、B兩個供應商購買零件，已知兩個供應商零件的不良率均為0.1。若該工廠自A、B兩個供應商分別購買5個和10個零件，試求15個零件中，不良品的平均數、變異數？又這15個零件中不良品超過1件的機率為何？

「統計學 二版」p9-11，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例解說

A、B兩個供應商，不良品均為0.1（開始思考……）
→ 購買零件，遇到不良品的狀況屬於「二項分配」
→相同零件、機率相同，A、B兩個抽樣，所以利用二項分配的「再生性」

$$A \sim \mathrm{B}\,(5, 0.1) \qquad B \sim \mathrm{B}(10, 0.1)$$

$$\Rightarrow \quad (A + B) \sim B(15, 0.1)$$

$$\therefore \mathrm{E}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{np} = 15 \times 0.1 = 1.5\text{（件）}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{np(1\text{-}p)} = 15 \times 0.1 \times 0.9 = 1.35$$

不良品超過 1 件之機率

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} > 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{x} = 0) - \mathrm{P}(\mathrm{x} = 1)$$

$$= 1 - C_0^{15}\ 0.1^0\ 0.9^{15-0} - C_1^{15}\ 0.1^1\ 0.9^{15-1} = 0.451$$

Poisson分配的再生性

在一個單位時段或區段內，某事件發生次數（X）的問題（常用於關於時間、長度、面積、...等問題）

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}\,!}, \mathrm{x} = 0,1,2\ldots$$ ，λ 為平均次數

$$\Longrightarrow X \sim Poi\,(\lambda) \qquad \mathrm{E(x)} = \lambda \qquad \mathrm{V(x)} = \lambda$$

Poisson分配的再生性

若 $X \sim Poi\,(\lambda_x)$ $\quad Y \sim Poi(\lambda_y)$

$$\Rightarrow X + Y \sim Poi(\lambda_x + \lambda_y)$$

continuous distribution

連續型機率分配

常態分配的再生性

最早由法國數學家De Moiver於1773年提出，隨後高斯（Carl Gauss）在重複測量的誤差研究中，亦導出曲線方程式，所以常態分配又稱為高斯分配。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < \infty$$

⇨ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad$ $E(x) = \mu$ $\quad$ $V(x) = \sigma^2$

常態分配的再生性

若 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ $\quad$ $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\Rightarrow \ X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

常態分配的加法性

設X_1, X_2, X_3, ..., X_n皆為互相獨立的常態隨機變數，即：

⇨ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_{\mathrm{i}}^2)$ i = 1,2,.....,n

若 $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ a_i為常數

$$\Rightarrow \quad Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

案例

已知蘋果與梨子每粒的重量服從常態分配，蘋果每粒平均重300g，標準差50g；梨子每粒平均重350g，標準差30g。現在隨機選取3粒蘋果3粒梨子裝成一盒，試求此盒水果重量的期望值與變異數？

「統計學 二版」p10-11，李德治、林孟濡、童惠玲 著，博碩文化

案例解說

兩個不同隨機變數，性質相同，都服從常態分配（開始思考......）
→ 求〝一盒〞，其組合包含此兩種隨機變數（蘋果、梨子）
→使用常態分配的「再生性」

蘋果$\sim N\ (300, 50^2)$　　　　梨子$\sim N(350, 30^2)$

$\Rightarrow$ 一盒$\sim N(\mu, \sigma^2)$　　　一盒有3粒蘋果＋3粒梨子

$\therefore\ \mu = 300 \times 3 + 350 \times 3 = 1950$（g）

$\sigma^2 = 3^2 \times 50^2 + 3^2 \times 30^2 = 30600$

Gamma分配的再生性

Gamma分配主要用在描述<u>第 α 次事件發生所需的時間</u>，而指數分配是在描述第一次發生所需的時間，所以可以說指數分配是Gamma分配的特例。

$$f(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}},$$

$$0 < x < \infty, \alpha > 0, \beta > 0$$ ，

x 為第 α次發生所需時間； β 表發生一次所需的時間；

Gamma 函數

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

⇨ $X \sim G(\alpha, \beta)$ $\mathrm{E}(x) = \alpha \cdot \beta$ $\mathrm{V}(x) = \alpha \cdot \beta^2$

Gamma分配的再生性

若 $X \sim G(\alpha_x, \beta)$ $Y \sim G(\alpha_y, \beta)$

$$\Rightarrow X + Y \sim G(\alpha_x + \alpha_y, \beta)$$

指數分配與Gamma分配

設X_1, X_2, X_3, ..., X_n皆為獨立隨機變數，且X_i ~ exp(λ)：

若 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 　　i = 1,2,.....,n

$$\Rightarrow \quad Y \sim G(\mathrm{n}, \lambda)$$

sample distribution

抽樣分配

卡方分配的再生性

有 n 個獨立之常態隨機變數 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ，來自同一母體，其平均數為 μ ，標準差為 σ ：

$$\chi_{\mathrm{n}}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \longleftarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\Longrightarrow\ X \sim \chi^2(\gamma) \qquad E(x) = \gamma = n\text{-}1 \qquad V(x) = 2\gamma = 2(n\text{-}1)$$

卡方分配的再生性

若 $X \sim \chi^2(\nu_x)$ $\quad Y \sim \chi^2(\nu_y)$

$$\Rightarrow\ X + Y \sim \chi^2(\nu_x + \nu_y)$$

The End