報酬率(RATE OF RETURN)

- 報酬率是指獲利或損失佔投資金額的百分比。可分為期望報酬率(expected return)與實際報酬率(realized return)。
- 期望報酬率從事前眼光評估投資報酬的可能性，或用機率分配來計算報酬的期望值。
- 實際報酬率則為事後(ex post)、實際發生的報酬率。
- 實際報酬率與期望報酬率的差異就是投資的風險。
- 報酬率又分為名目報酬率與實質報酬率兩種，前者是依照投資獲利或損失所得到的名目金額來計算，後者則扣除了通貨膨脹率因素考量投資後產生的實質報酬。

持有期間報酬(HPR)是包括買賣價差報酬之外還包括這段期間內所配發的利息、股利等。持有期間報酬=利息(股利)所得+資本利得

$$\textbf{HPR} = \frac{\text{資本利得} + \text{利息所得}}{\text{期初價格}} \times 100\%$$

$$\textbf{HPR} = \left(\frac{\text{期末總報酬}}{\text{期初支付}} - 1\right) * 100\%$$

$\Rightarrow$for stock dividend case

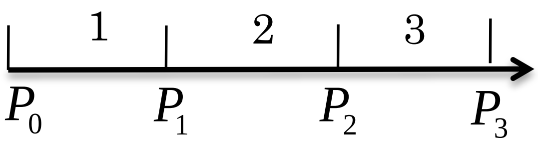
某甲以960買入票面利率10%、面值1000元的政府公債，一年後以1020元賣出，求報酬率

$$\frac{1020 - 960 + 100}{960} = 16.67\%$$

某乙以每股40買入統一股票100股，一年以後以每股42元賣出，期間收到3的現金股利，求報酬率。

$$\frac{42 - 40 + 3}{40} = 12.5\%$$

簡單報酬率與連續複利報酬率



	簡單報酬率	連續複利報酬率
公式	$r_t=(P_t-P_{t-1})/P_t$	$r_t=\ln(P_t/P_{t-1})$
報酬累積過程	$P_t=P_{t-1}\times(1+r_t)$	$P_t=P_{t-1}\times e^{r_t}$
累積報酬率計算	$(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)-1$	$r_1+r_2+\cdots+r_n$
平均報酬率計算	$\sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)}-1$	$(r_1+r_2+\cdots+r_n)/n$

使用連續複利報酬率具有可加性，累積報酬為各期報酬之累加。但使用簡單報酬率無法累加。

方法	算術平均報酬率	幾何平均報酬率
假設	原始投資金額不變	獲利(虧損)會改變原始投資金
再投資報酬率	無	下一期之報酬率
使用時機	短期且期間報酬率波動幅度小	長期且期間報酬率波動幅度大
當每期報酬率相同時，兩種方法一樣。但每期報酬波動時，算術平均會高估重。		

月份	基金淨值	各年報酬率
2000/12/31	100	
2001/12/31	60	-40.00%
2002/12/31	180	200.00%
2003/12/31	100	-44.44%

某檔基金淨值在2000年底為100元，當時你投資了100萬，經過三年後，該基金的淨值在各年年底為如下表，請問這三年投資累積報酬率與平均年報酬率為多少？

三年累積報酬率＝

$$(1\text{-}40\%)(1+200\%)(1-44.44\%)-1=0\%$$

$$=\frac{\text{資產期末價值}}{\text{資產期初價值}}\text{-}1=\frac{100}{100}\text{-}1=0\%$$

幾何平均報酬率＝

$$\sqrt[3]{(1\text{-}40\%)(1+200\%)(1-44.44\%)}-1=0\%$$

算數平均報酬率＝

(-40%+200%-44.44%)/3=38.52%

報酬率的年化

三個月賺1.2%與三年賺15%哪個報酬率較高，基本上是無法比較的。同樣地僅有報酬率資訊但沒有期間資訊是無法判斷是不是好的投資機會？雖然不同工具或計畫有不同的期間，有的長逾數年，有的不足一年，但可以將報酬率年化，讓投資人判斷報酬率的高低。而幾何平均數的公式就是報酬率年化的概念。

$$\text{年化報酬率} = \sqrt[\text{期間}]{\frac{\text{期末資產價值}}{\text{期初資產價值}}} - 1 = \sqrt[\text{期間}]{\text{累積報酬}} - 1$$

三年賺15%的年化報酬= $\sqrt[3]{1+15\%} - 1 = 4.77\%$

三月賺1.2%的年化報酬=

$$\sqrt[1/4]{1+1.2\%} - 1 = (1+1.2\%)^4 - 1 = 4.89\%$$

如果報酬率是用ln方式來算，如三個月報酬率1.2%，年化報酬為1.2%*4=4.8%

風險衡量

變異數

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}{n-1}$$

標準差

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}{n-1}}$$

$$\text{變異係數} = \frac{\sigma}{\mu}\ (\text{母體}) = \frac{S}{\bar{R}}\ (\text{樣本})$$

標準差越大，風險越高。

變異係數衡量每單位報酬所承受的風險，變異係數越大，表示每單位報酬的風險越高。

風險的年化

如果資料是月單位，所算出來的風險是月報酬的標準差，將標準差年化方法如下：

$$\sigma_{year} = \sigma_{month} \cdot \sqrt{12}$$

當資料單位為： Δt

$$\sigma_{year} = \sigma_{\Delta t} \cdot \sqrt{1/\Delta t}$$

季資料時 $\Delta t = 1/4$

投資組合的報酬與風險

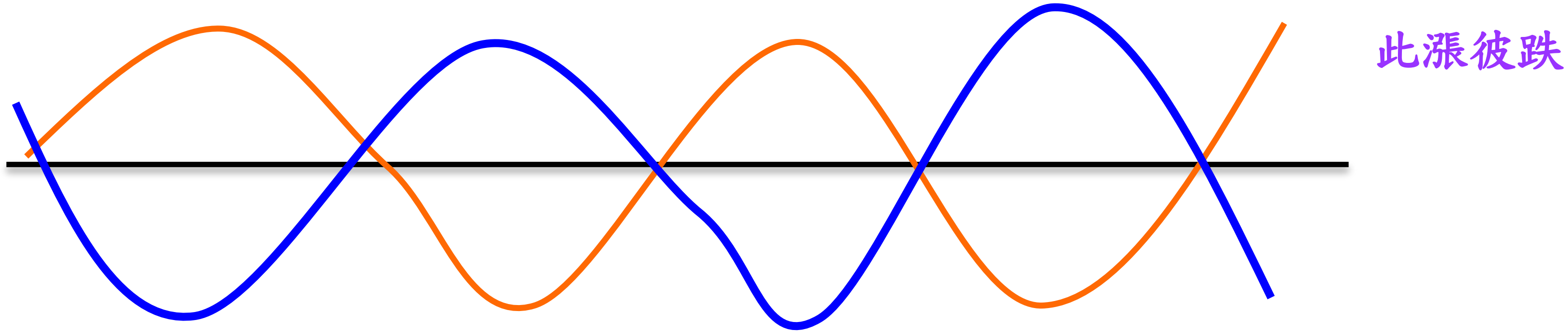
如果你是很怕投資風險的投資者，是不是應該將100萬資金全數投資A股，產生低報酬低風險？

如果撥其中10萬投資在高報酬高風險的B股上，會不會提高報酬同時也提高風險？

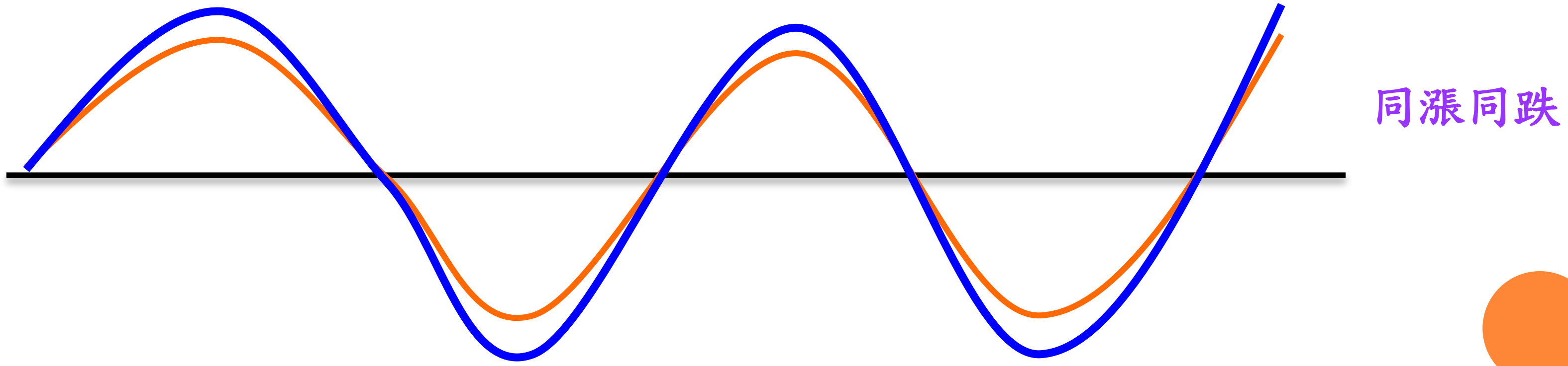
月份	100%A股	100%B股	90%A股10%B股
1月	12.00%	-24.00%	8.40%
2月	-5.00%	16.00%	-2.90%
3月	-4.00%	6.00%	-3.00%
4月	24.00%	-6.00%	21.00%
5月	8.00%	35.00%	10.70%
6月	6.00%	-4.00%	5.00%
7月	-4.00%	15.00%	-2.10%
8月	5.00%	16.00%	6.10%
平均報酬	**5.25%**	**6.75%**	**5.40%**
風險(標準差)	**9.87%**	**17.97%**	**8.25%**
變異係數	**1.88**	**2.66**	**1.53**

風險分散的原理

兩個資產報酬率的波動呈現**負相關**時，那麼將資金分配此二資產就會有效降低風險。



兩個資產報酬率的波動呈現**正相關**時，那麼將資金分配此二資產就降低風險能力會如何？



投資組合報酬率與風險

資產	投資比例	報酬率	期望報酬	風險	相關係數
Asset1	w_1	R_1	$E(R_1)$	σ_1^2	ρ_{12}
Asset 2	$w_2 = 1 - w_1$	R_2	$E(R_2)$	σ_2^2	

投資組合預期報酬率 $E(R_P) = E(w_1 R_1 + w_1 R_2) = w_1 E_1 + w_2 E_2 = \mathbf{w}'\mathbf{E}$

$$\sigma_P^2 = Var(R_P) = Var(w_1 R_1 + w_2 R_2)$$

$$= w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + 2 w_1 w_2 Cov(R_1, R_2)$$

$$= w_1^2 \sigma_2^2 + w_1^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}$$

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{w}'\Omega\mathbf{w}$$

投資組合預期報酬率是個線性加總的概念。
但投資組合預期的變異數是個二次式平方的概念，並非線性加總的形式，組合的風險除了個別風險有關外，也與資產間的共變數(相關係數)有關。

相關係數：為衡量兩個隨機變數（資產報酬率）的變化間之相關程度。
公式：

$$\rho_{X,Y}=\frac{E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$Cov(X,Y)=E\left[\left(X_i-E(X)\right)\left(Y_j-E(Y)\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\left(X_i-E(X)\right)\left(Y_j-E(Y)\right)$$

$$Cov(aX+b,Y)=Cov(X,aY+b)=aCov(X,Y)$$

$$Var(aX+b)=a^2Var(X)$$

共變異與資料尺度有關，共變數越大，不代表他們越相關

$$\rho_{aX+b,Y}=\rho_{X,Y}$$

相關係數與資料尺度無關，相關係數必定介於-1到1之間，係數越大，代表他們越相關

$$-1\le\rho_{X,Y}\le1$$

N種商品投資組合報酬率與變異數之計算

$$E(R_P) = E(w_1 R_1 + w_2 R_2 + \cdots + w_N R_N) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \cdots + w_N E(R_N)$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} = w'E$$

$$Var(R_P) = Var(w_1 R_1 + w_2 R_2 + \cdots + w_N R_N)$$

$$= w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_2^2 + \cdots + w_N \sigma_N^2 + 2\sum_{i}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

$$= w' \Omega w$$

某一投資組合包含四種股票，其投資比例分別為0.2、0.3、0.4、0.1，期望報酬率分別為10%、12%、14%、16%。而股票間的變異數-共變數矩陣為

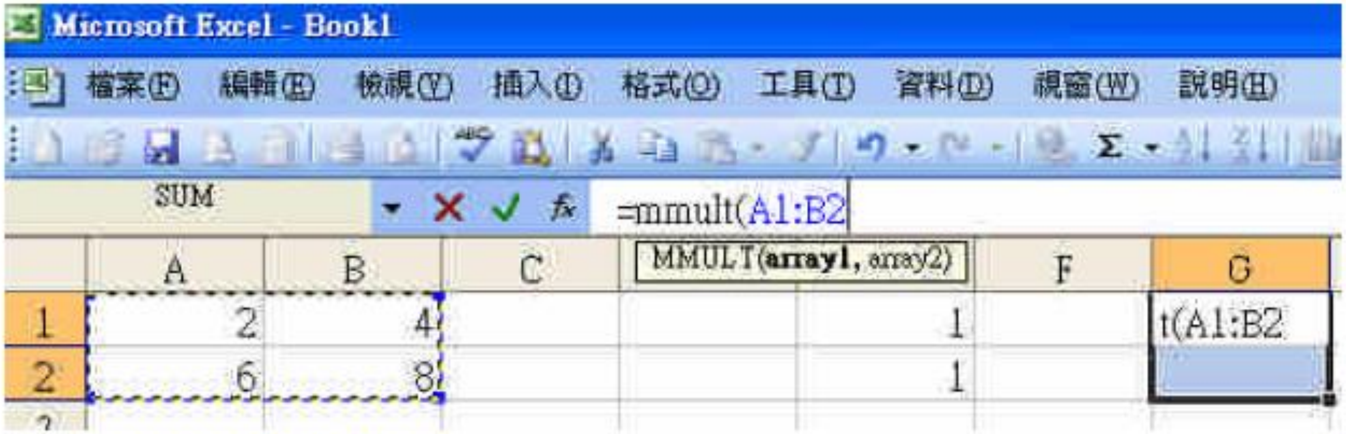
$$w = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 10\% \\ 12\% \\ 14\% \\ 16\% \end{bmatrix} \quad \Omega =$$

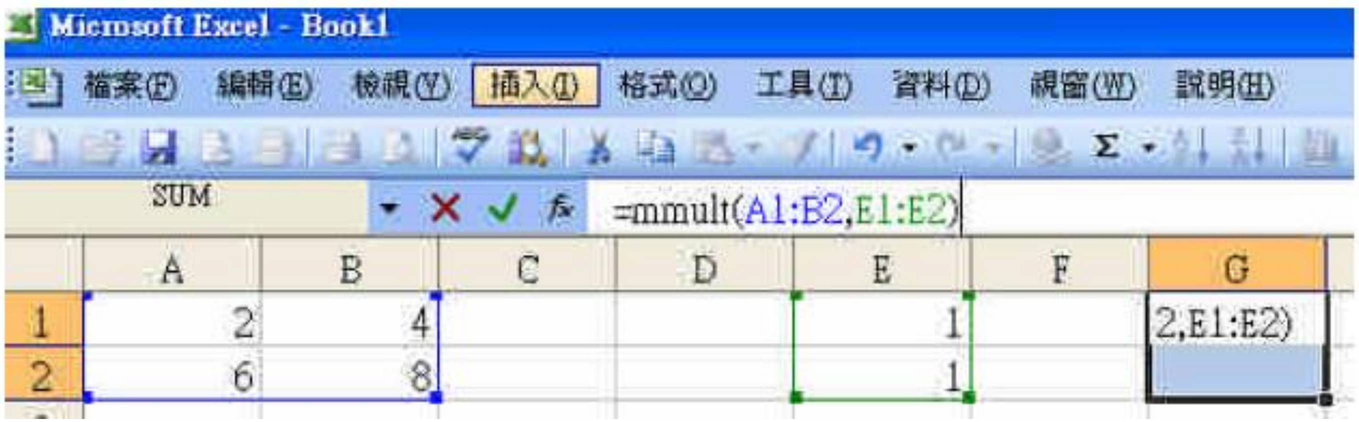
0.00160	0.00192	-0.00064	0.0024
0.00192	0.00360	-0.00096	0.0036
-0.00064	-0.00096	0.00640	-0.0032
0.0024	0.0036	-0.0032	0.0100

$$E(R_p) = 12.8\%$$

$$\begin{aligned} Var(R_p) = \sigma_P^2 &= 0.2^2 \cdot 0.0016 + 0.3^2 \cdot 0.0036 + 0.4^2 \cdot 0.0064 + 0.1^2 \cdot 0.01 \\ &+ 2 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.00192 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \cdot (-0.0064) + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.0024 \\ &+ 2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 \cdot (-0.0096) + 2 \cdot 0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.0036 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.1 \cdot (-0.0032) \\ &= 0.001466 \end{aligned}$$

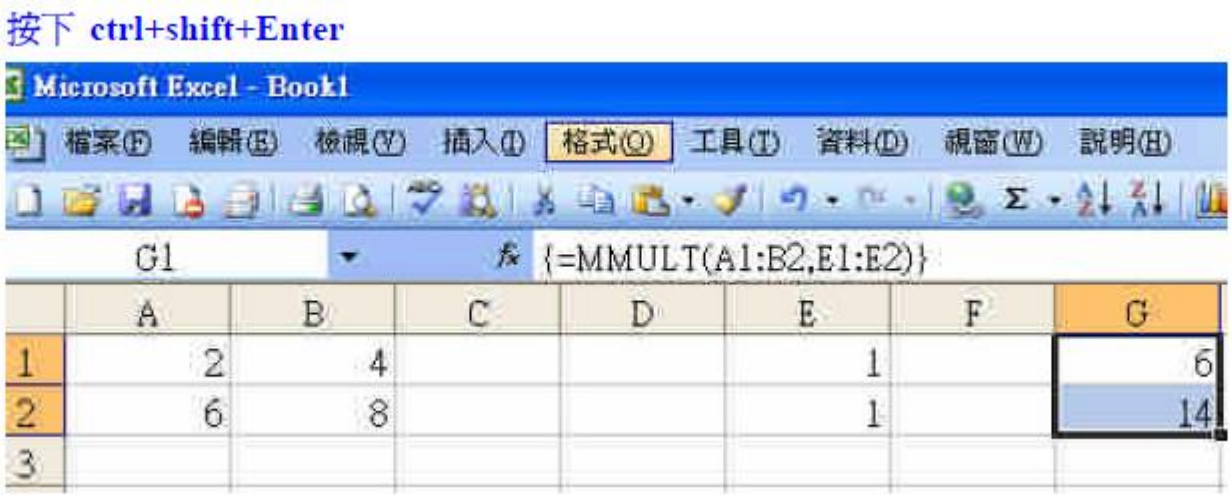
EXCEL 矩陣運算





$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EXCEL 矩陣運算



這個地方要反白之後，按Ctrl+shift+enter即能算出

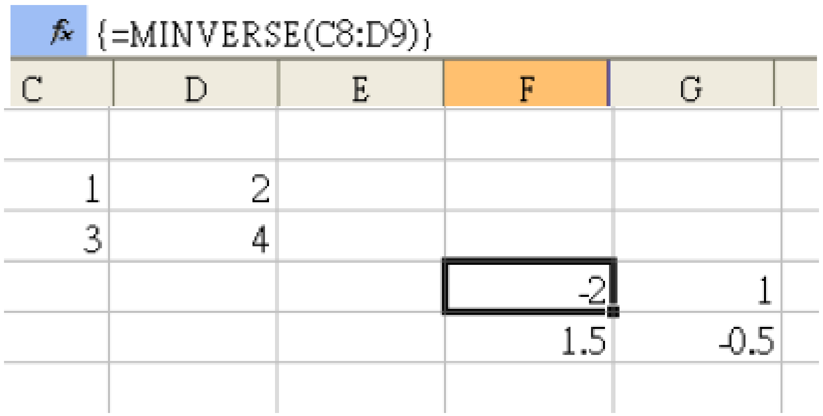
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

矩陣相乘mmult(,)
反矩陣minverse( )

矩陣轉置transpose( )

EXCEL 矩陣運算

反矩陣開始如上，任意代入矩陣　選取範圍輸入反轉函數（Ｍｉｎｖｅｒｓｅ）



fx {=MINVERSE(C8:D9)}

C	D	E	F	G
1	2			
3	4			
			-2	1
			1.5	-0.5

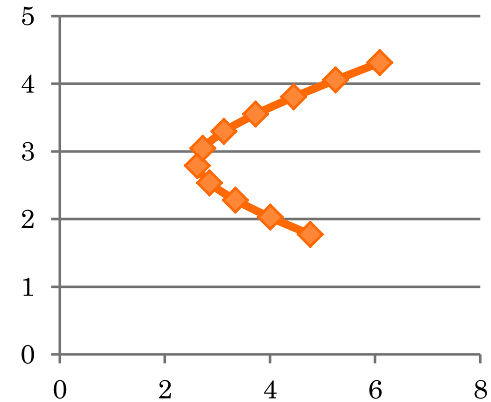
這個地方要反白之後，打 Minverse(C1:D2)，**並按 Ctrl+shift+enter** 即能算出

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

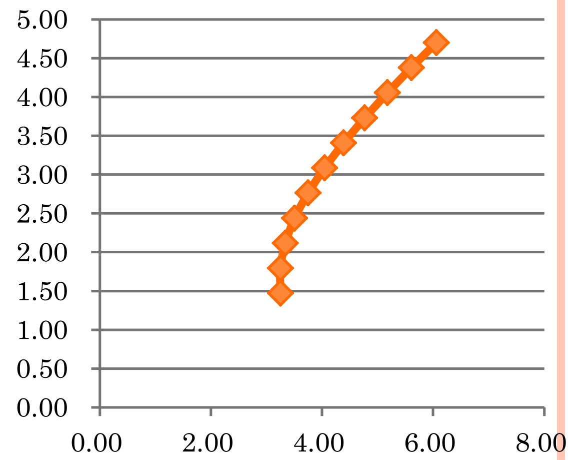
這個就是單位矩陣，任何一個2*2的矩陣，乘上單位矩陣後，還是自己。其角色就像數字1一樣。

	A	B	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	8.8	-1.2	-1.2	-0.2	0.8	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8	7.8	8.8
2	7.8	-3.5	-3.5	-2.37	-1.24	-0.11	1.02	2.15	3.28	4.41	5.54	6.67	7.8
3	-3.5	6.5	6.5	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5	0.5	-0.5	-1.5	-2.5	-3.5
4	9.5	1.5	1.5	2.3	3.1	3.9	4.7	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5
5	3.2	-3.9	-3.9	-3.19	-2.48	-1.77	-1.06	-0.35	0.36	1.07	1.78	2.49	3.2
6	9	6	6	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9
7	-4.6	7	7	5.84	4.68	3.52	2.36	1.2	0.04	-1.12	-2.28	-3.44	-4.6
平均	4.31	1.77	1.77	2.03	2.28	2.53	2.79	3.04	3.30	3.55	3.81	4.06	4.31
標準差	6.09	4.77	4.77	4.01	3.35	2.85	2.62	2.73	3.13	3.73	4.46	5.25	6.09



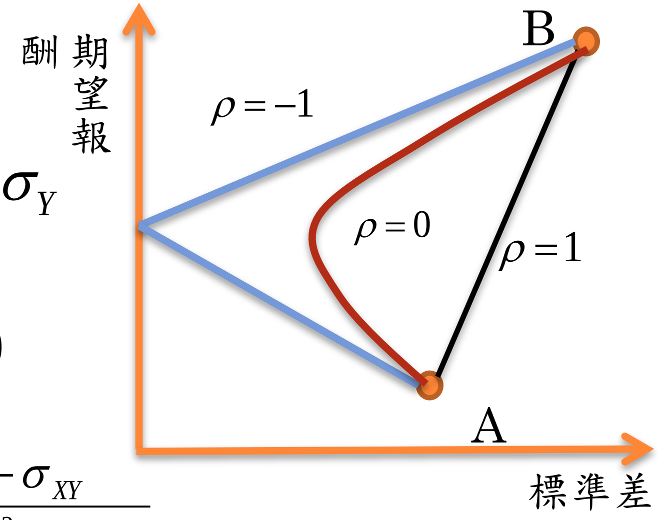
相關係數 -0.52

	A	B	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	8.8	4.4	4.4	4.84	5.28	5.72	6.16	6.6	7.04	7.48	7.92	8.36	8.8
2	7.8	3.6	3.6	4.02	4.44	4.86	5.28	5.7	6.12	6.54	6.96	7.38	7.8
3	-3.5	-1.75	-1.75	-1.925	-2.1	-2.275	-2.45	-2.625	-2.8	-2.975	-3.15	-3.325	-3.5
4	9	4.74	4.74	5.166	5.592	6.018	6.444	6.87	7.296	7.722	8.148	8.574	9
5	6.4	-3.9	-3.9	-2.87	-1.84	-0.81	0.22	1.25	2.28	3.31	4.34	5.37	6.4
6	9	2	2	2.7	3.4	4.1	4.8	5.5	6.2	6.9	7.6	8.3	9
7	-4.6	1.2	1.2	0.62	0.04	-0.54	-1.12	-1.7	-2.28	-2.86	-3.44	-4.02	-4.6
平均	4.70	1.47	1.47	1.79	2.12	2.44	2.76	3.09	3.41	3.73	4.05	4.38	4.70
標準差	6.06	3.25	3.25	3.25	3.34	3.51	3.75	4.05	4.39	4.77	5.18	6.06	3.25



相關係數0.46

在兩種證券下之最小風險組合(不能放空)



$$\min \sigma_P^2 = w^2\sigma_X^2 + (1-w)^2\sigma_Y^2 + 2w(1-w)\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y$$

$$\frac{d\sigma_P^2}{dw} = 2w\sigma_X^2 - 2(1-w)\sigma_Y^2 + (2-4w)\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y = 0$$

$$w = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\sigma_Y^2 - Cov(X,Y)}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2Cov(X,Y)} = \frac{\sigma_Y^2-\sigma_{XY}}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\sigma_{XY}}$$

$\rho_{XY} = -1$ $\quad w = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X+\sigma_Y}$

$\rho_{XY} = 0$ $\quad w = \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^s+\sigma_Y^2}$

$\rho_{XY} = 1$ 全部投資在風險最小的資產

	0.2	0.3	0.4	0.5
平均數	2.28	2.53	2.79	3.04
標準差	3.35	2.85	2.62	2.73

$$w = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y} = \frac{4.77^{2.} - (-0.52)\cdot 6.09\cdot 4.77}{6.09^2+4.77^{2.}-2(-0.52)6.09\cdot 4.77} = 0.42$$

$$\sigma_{mvp}^2 = 0.42^2\cdot 6.09^2 + 0.58^2\cdot 4.77^2 + 2\cdot 0.42\cdot 0.58\cdot(-0.52)\cdot 6.09\cdot 4.77 = 6.837$$

$$\sigma_{mvp} = 2.615$$

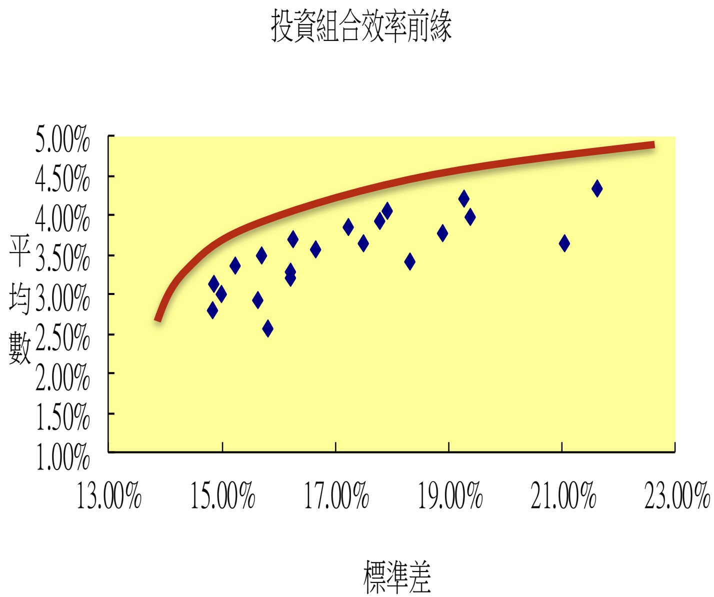
三種資產

	平均數
味全食品	2.57%
欣欣大眾	3.65%
彰化銀行	4.35%

變異共變數	味全食品	欣欣大眾	彰化銀行
味全食品	249.96	132.39	204.31
欣欣大眾	132.39	442.68	171.41
彰化銀行	204.31	171.41	466.99

味全食品、欣欣大眾與彰化銀行由1985到1994月報酬率之變異數與共變數：

個股比例			組合報酬率		個股比例			組合報酬率	
味全	欣欣	彰化	平均數	標準差	味全	欣欣	彰化	平均數	標準差
0.0	0.0	1.0	4.35	21.61	0.4	0.0	0.6	3.64	17.50
0.0	0.2	0.8	4.21	19.27	0.4	0.2	0.4	3.50	15.70
0.0	0.4	0.6	4.07	17.92	0.4	0.4	0.2	3.36	15.23
0.0	0.6	0.4	3.93	17.79	0.4	0.6	0.0	3.22	16.21
0.0	0.8	0.2	3.79	18.89	0.6	0.0	0.4	3.28	16.21
0.0	1.0	0.0	3.65	21.04	0.6	0.2	0.2	3.14	14.86
0.2	0.0	0.8	3.99	19.38	0.6	0.4	0.0	3.00	14.98
0.2	0.2	0.6	3.85	17.22	0.8	0.0	0.2	2.93	15.62
0.2	0.4	0.4	3.71	16.26	0.8	0.2	0.0	2.79	14.83
0.2	0.6	0.2	3.57	16.65	1.0	0.0	0.0	2.57	15.81
0.2	0.8	0.0	3.43	18.32					

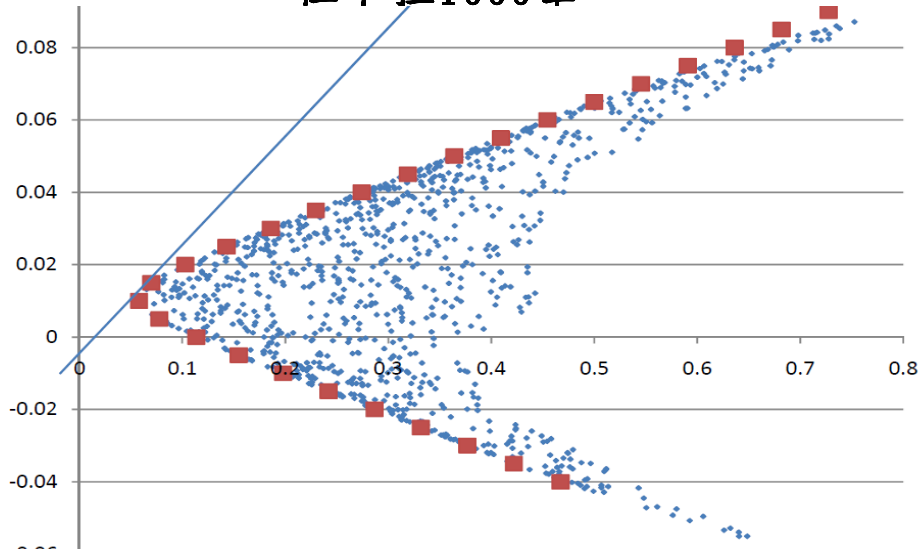


台灣股票10,000筆投資組合之效率前緣

	mean	共變數	A鴻海	B國泰金	C中鋼
A鴻海	0.008923	A鴻海	0.006699	0.001193	0.000709
B國泰金	0.006734	B國泰金	0.001193	0.00695	0.002579
C中鋼	0.017167	C中鋼	0.000709	0.002579	0.007667

a	b	c	var	stedv	mean
2.93934	-0.24956	-1.68978	0.073578	0.271253	-0.00446
-0.37712	0.837199	0.539917	0.009347	0.096681	0.011542
1.85286	3.241607	-4.09447	0.15968	0.399599	-0.03193
0.697	0.869224	-0.56622	0.009311	0.096495	0.002352
-3.26565	-1.61082	5.876471	0.290736	0.5392	0.060896

往下拉1000筆



a和b都是丟1000筆亂數，c=1-a-b

資料－>資料分析－>亂數產生器

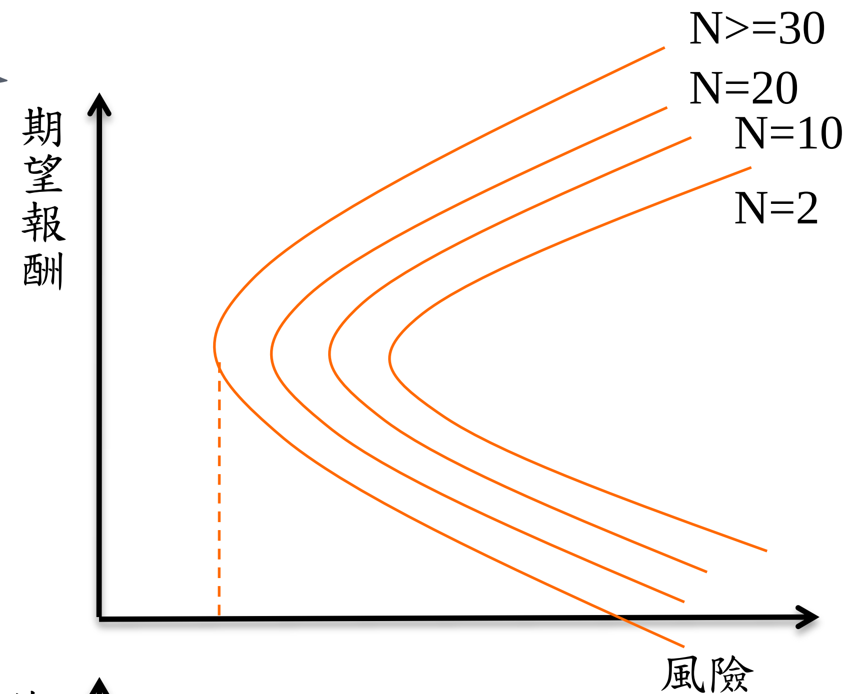
變數個數	1
亂數個數	1000
分配	均等分配
參數	－4 到 4

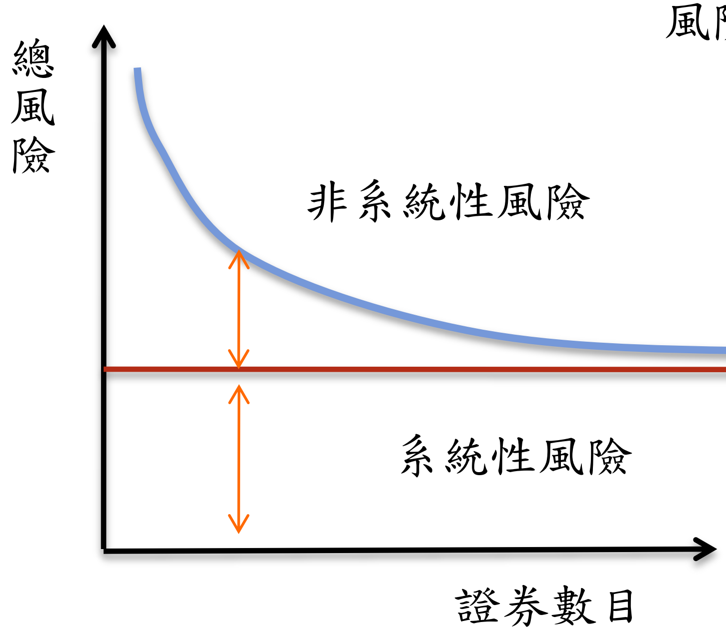
在來選取所要的範圍

只要按照公式算第一筆的var、stdev、mean，即分別為0.073578、0.271253、-0.00446，往下拉1000筆即可完成。

系統風險與非系統風險

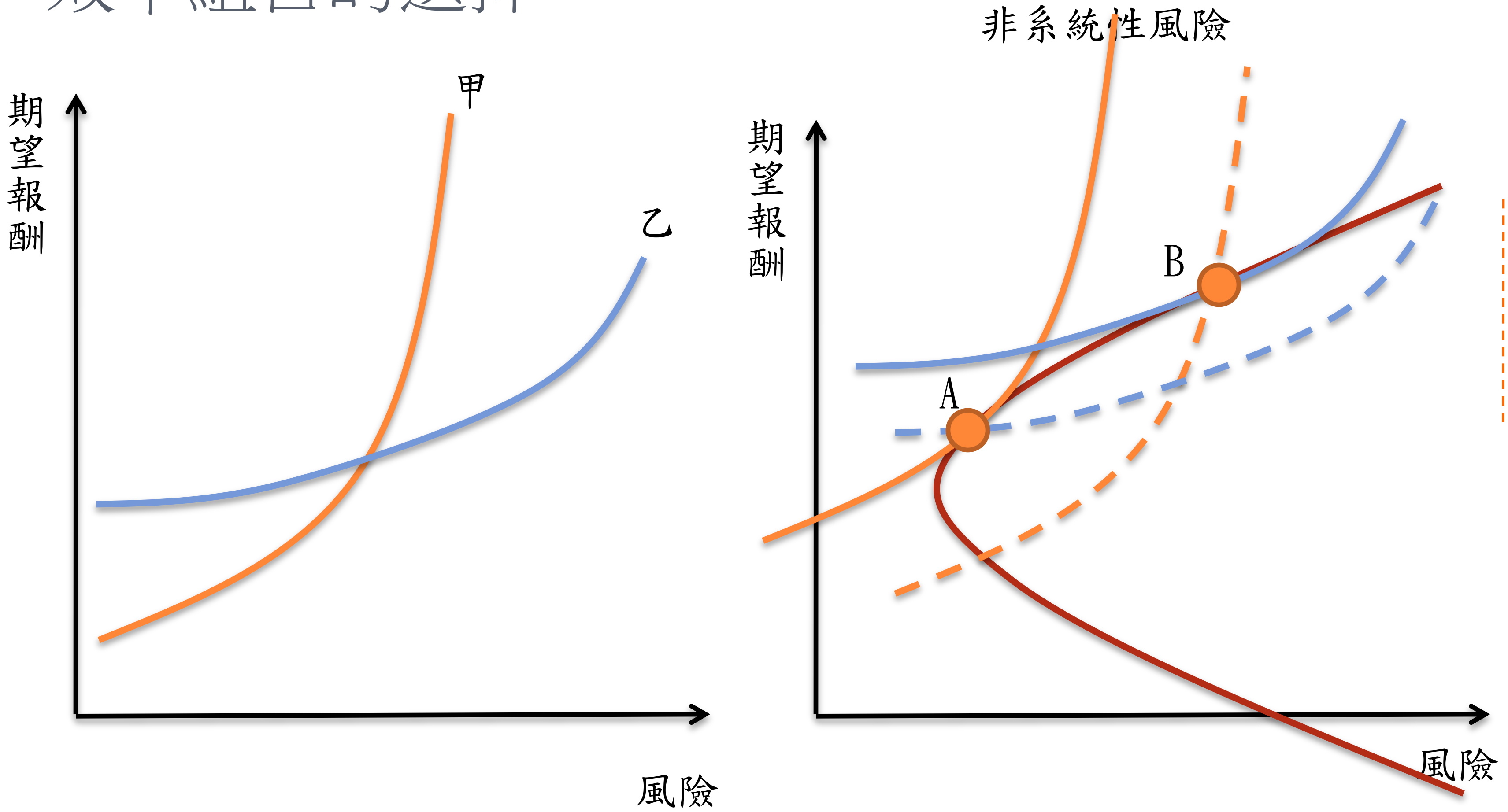
- 證券增加時會降低投資組合的風險，隨著證券數目越多，風險就越低。然而風險的降幅會越來越少，即使證券數目增加到無窮大時，仍有一部份的風險無法消除，此部分稱為系統性風險(Systematic Risk)。系統性風險大多是總體經濟環境造成的，如經濟成長率、利率、通貨膨脹、政府政策等，幾乎所有的證券都受到影響。非系統風險則是個別公司所產生的風險，可以透過多角化而分散的風險。





效率組合的選擇

N>=30



甲比較討厭風險，乙相對比較不厭惡風險。甲會選擇低報酬低風險的組合，乙會選擇高報酬高風險的組合。不管是甲還是乙，一定只選擇效率前緣的組合。

效率前緣的數學推導

$$\min_{\{w\}} \ \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2} w^T \Omega w$$

subject to

$$w'E = E[\tilde{R}_p] = E_p$$

$$w'\mathbf{1} = 1,$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

給定報酬率下，尋找一個權重比例使得投資組合的風險最小。

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_N) \end{bmatrix} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

代表每個資產的投資比重

代表每個資產的期望報酬率

代表每個資產的變異風險以及兩兩資產間的共變異數

效率前緣的數學推導

The Lagrangian:

$$\min_{\{\omega,\lambda,\gamma\}} L = \frac{1}{2} w'\Omega w + \lambda\left(E[\tilde{R}_p] - w'E\right) + \gamma\left(1 - w'\mathbf{1}\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \Omega w_p - \lambda E - \gamma \mathbf{1} = \underset{(N\times 1)}{\mathbf{0}},$$

$$\boxed{\Rightarrow w_p = \lambda\left(\Omega^{-1}E\right) + \gamma\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right).}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E[\tilde{R}_p] - w_p' E = 0,$$

$$E[\tilde{R}_p] = w_p' E = E' w_p = \lambda\left(E'\Omega^{-1}E\right) + \gamma\left(E'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - w_p' \mathbf{1} = 0,$$

$$1 = w_p' \mathbf{1} = \mathbf{1}' w_p = \lambda\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}E\right) + \gamma\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right).$$

$$E_p = \lambda B + \gamma A \quad 1 = \lambda A + \gamma C$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)E[\tilde{R}_p] - \left(E'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)}{\left(E'\Omega^{-1}E\right)\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right) - \left(E'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)^2} = \frac{CE[\tilde{R}_p] - A}{D}$$

$$A = \mathbf{1}'\Omega^{-1}E = E'\Omega^{-1}\mathbf{1}, \quad B = E'\Omega^{-1}E, \quad C = \mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1},$$

$$D = BC - A^2.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\left(E'\Omega^{-1}E\right) - \left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}E\right)E[\tilde{R}_p]}{\left(E'\Omega^{-1}E\right)\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right) - \left(E'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)^2} = \frac{B - AE[\tilde{R}_p]}{D},$$

$$\boxed{\Rightarrow w_p = \frac{CE_p - A}{D}\left(\Omega^{-1}E\right) + \frac{B - AE_p}{D}\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)}$$

$$E[\tilde{R}_p] = 0 \quad \Rightarrow \quad w_p = g$$

$$E[\tilde{R}_p] = 1 \quad \Rightarrow \quad w_p = g + h$$

效率前緣的組合

$$w_p = \frac{1}{D}\left(B(\Omega^{-1}\mathbf{1}) - A(\Omega^{-1}E)\right) + \frac{B - A}{D}\left(C(\Omega^{-1}E) - A(\Omega^{-1}\mathbf{1})\right)E_p$$

$$\boxed{w_p = g + h \cdot E_p}$$

$$w_p = (1 - E[\tilde{R}_p])g + E[\tilde{R}_p](g + h)$$

而所有效率前緣的組合都可以由此二組合所組成

我們可以計算兩個效率前緣組合之間的共變數，如果p 組合與q 組合都是效率組合，所以他們的組合權重必定滿足

$$w_p = g + h \cdot E_p$$
$$w_q = g + h \cdot E_q$$

共變數的計算就是 $Cov\left(\tilde{R}_p, \tilde{R}_q\right) = w_p' \,\Omega w_q$

$$Cov\left(\tilde{R}_p, \tilde{R}_q\right) = \left(\mathbf{g} + \mathbf{h}E[\tilde{R}_p]\right)' \Omega \left(\mathbf{g} + \mathbf{h}E[\tilde{R}_q]\right)$$

$$g = \frac{1}{D}\left[B\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right) - A\left(\Omega^{-1}E\right)\right]$$

$$h = \frac{1}{D}\left[C\left(\Omega^{-1}E\right) - A\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)\right].$$

$$\boxed{Cov\left(\tilde{R}_p, \tilde{R}_q\right) = w_p' \,\Omega w_q = \frac{C}{D}\left(E[\tilde{R}_p] - A/C\right)\left(E[\tilde{R}_q] - A/C\right) + 1/C,}$$

如果p組合與q組合是一樣的組合，那麼自己與自己的共變數就是變異數

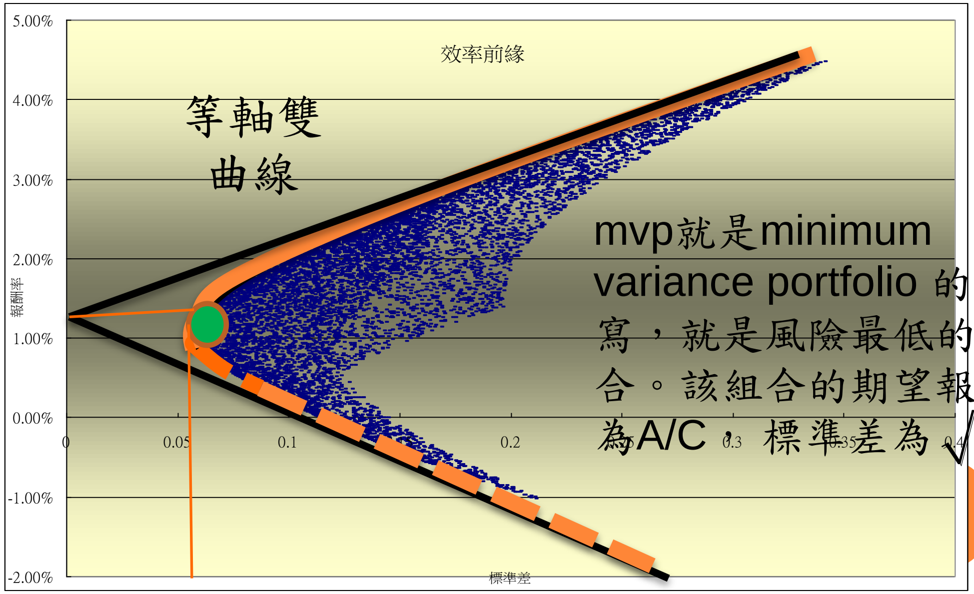
$$\boxed{\sigma_p^2 = \frac{C}{D}\left(E[\tilde{R}_p] - A/C\right)^2 + 1/C}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{\left(E_p - A/C\right)^2}{D/C^2} = 1}$$

這個就是效率前緣公式，基本上是個等軸雙曲線其漸進線為

$$\Rightarrow E_p = A/C \pm \sqrt{D/C} \cdot \sigma_p$$

A/C



$\sqrt{1/C}$

mvp就是minimum variance portfolio 的簡寫，就是風險最低的組合。該組合的期望報酬為A/C，標準差為 $\sqrt{1/C}$

台灣股票10,000筆投資組合之效率前緣

	mean	共變數	A鴻海	B國泰金	C中鋼
A鴻海	0.008923	A鴻海	0.006699	0.001193	0.000709
B國泰金	0.006734	B國泰金	0.001193	0.00695	0.002579
C中鋼	0.017167	C中鋼	0.000709	0.002579	0.007667

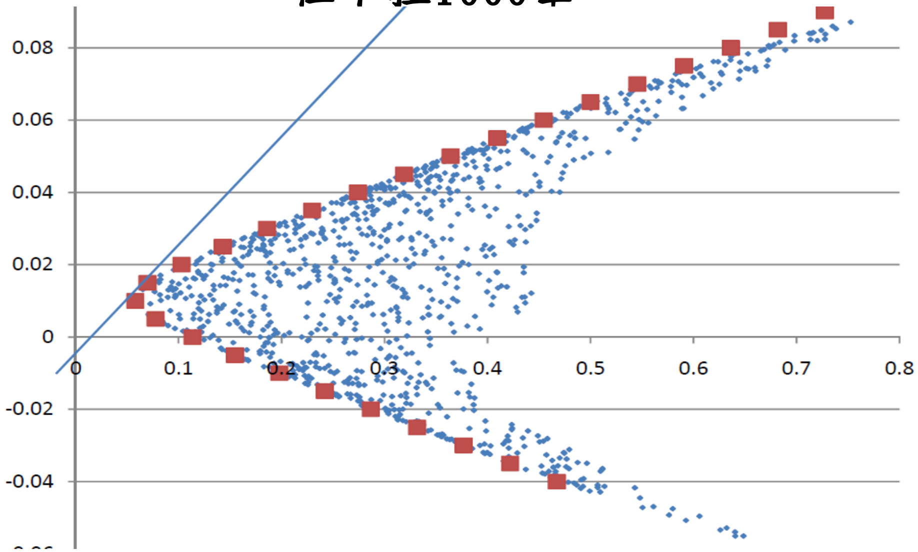
C	D
302.3747	3.617250497

A	B
3.234037	0.046552

g	h
0.603888	-18.1516
1.168256	-81.5052
-0.77214	99.65683
1	0

a	b	c	var	stedv	mean		STEDV	MEA N
2.93934	-0.24956	-1.68978	0.073578	0.271253	-0.00446	0.684881		
-0.37712	0.837199	0.539917	0.009347	0.096681	0.011542	1.531933		
1.85286	3.241607	-4.09447	0.15968	0.399599	-0.03193	-1.21681	0.467057	-0.04
0.697	0.869224	-0.56622	0.009311	0.096495	0.002352		0.421728	-0.035
-3.26565	-1.61082	5.876471	0.290736	0.5392	0.060896		0.376492	-0.03
2.71218	1.52026	-3.23244	0.117506	0.342792	-0.02105		0.331388	-0.025

往下拉1000筆



有個組合p，如果前緣有個組合和它零相關，稱為ZC(p)

$$Cov\left(\tilde{R}_p,\tilde{R}_{zc(p)}\right)=\frac{C}{D}\left(\left(E(\tilde{R}_p)-A/C\right)\left(E(\tilde{R}_{zc(p)})-A/C\right)+D/C^2\right)=0$$

$$E(\tilde{R}_{zc(p)})=A/C-\frac{D/C^2}{E(\tilde{R}_p)-A/C}\ \substack{>\\<}\ A/C \qquad E(\tilde{R}_p)\ \substack{>\\<}\ A/C$$

P若是效率組合，ZC(p)落在不效率前緣上

對前緣全微分

$$2C\sigma_p d\sigma_q-\frac{2C^2}{D}\left(E(\tilde{R}_p)-A/C\right)dE(\tilde{R}_p)=0. \Rightarrow \frac{dE(\tilde{R}_p)}{d\sigma_p}=\frac{D\sigma_p}{CE(\tilde{R}_p)-A},$$

找到期望報酬和風險的斜率關係

$$E_p-\frac{dE_p}{d\sigma_p}\cdot\sigma_p=E_p-\frac{D\sigma_p}{CE_p-A}\cdot\sigma_p=A/C+E_p-A/C-\frac{\sigma_p^2\cdot D/C}{E_p-A/C}=A/C-\frac{D/C^2}{E_p-A/C}=E(\tilde{R}_{zc(p)})$$

$$w_p=\lambda\left(\Omega^{-1}E\right)+\gamma\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right).$$

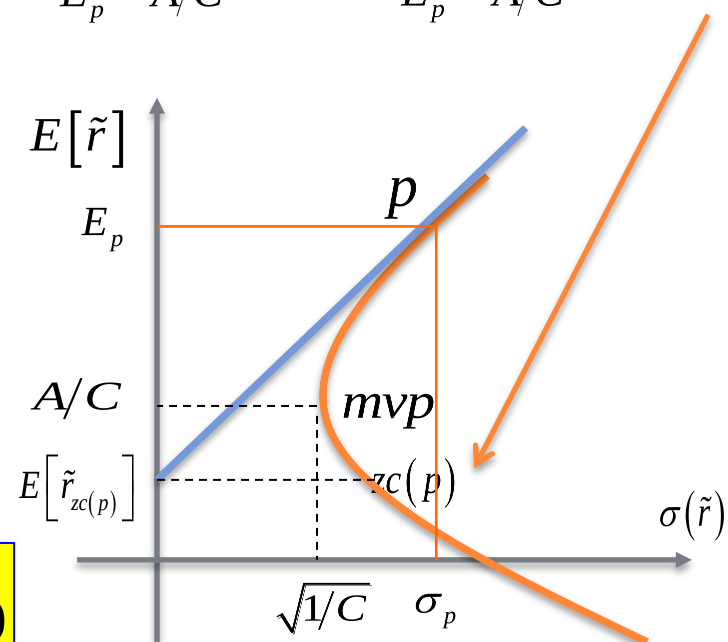
$$Cov\left(\tilde{R}_p,\tilde{R}_{zc(p)}\right)=\lambda E_{zc(p)}+\gamma=0$$

$$\gamma=-\lambda E_{zc(p)}$$

$$Cov\left(\tilde{R}_p,\tilde{R}_q\right)=\sigma_{pq}=\lambda(E_q-E_{zc(p)})$$

$$Cov\left(\tilde{R}_p,\tilde{R}_p\right)=\sigma_p^2=\lambda(E_p-E_{zc(p)})$$

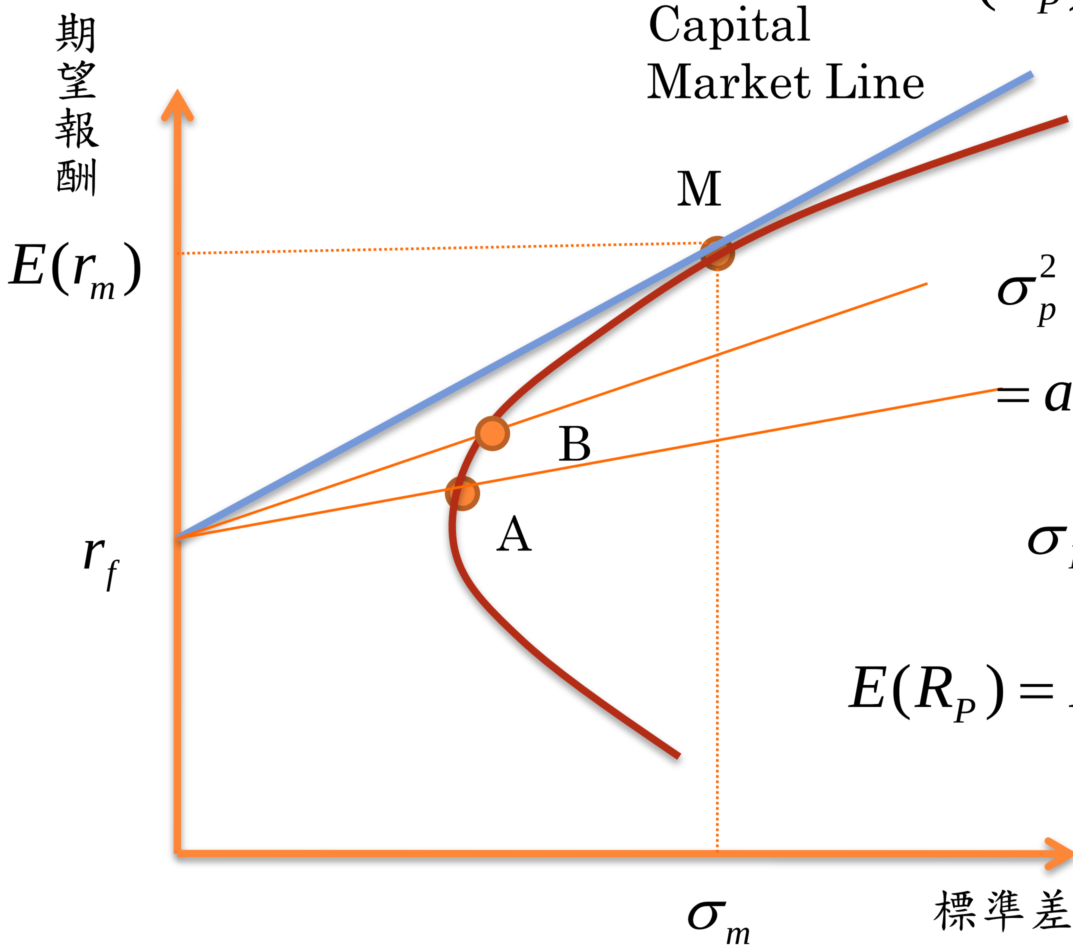
$$\boxed{E_q-E_{zc(p)}=\frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2}(E_p-E_{zc(p)})=\beta_{pq}(E_p-E_{zc(p)})}$$



Zero Beta CAPM

加上無風險資產之效率前緣

$$E(R_P) = aE(R_m) + (1-a)R_f$$



$$\sigma_p^2 = \mathrm{var}(aR_m + (1-a)R_f)$$

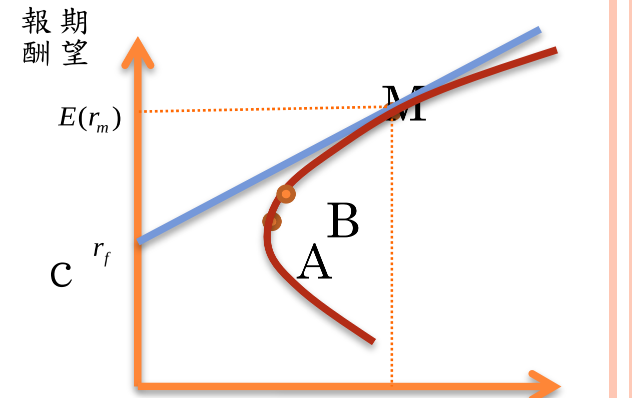
$$= a^2\,\mathrm{var}(R_m) = a^2\sigma_m^2$$

$$\sigma_P = a\sigma_m$$

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m}\sigma_P$$

資本市場線說明了效率集合的報酬率與總風險之間的關係

尋找市場組合



$$\max_{w_i} \theta = \frac{E(R_P)-R_f}{\sigma_P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(E_i - R_f)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial w_i} = \frac{1}{\sigma_P^2}\left[(E_i - R_f)\sigma_P - \frac{1}{2\sigma_P}\left(2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij}\right)(E_p - R_f)\right] = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

$$-\left[\frac{E_P - R_f}{\sigma_P^2}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij}\right] + (E_i - R_f) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n \qquad \lambda\left[\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij}\right] = (E_i - R_f) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\begin{aligned}
\lambda[w_1\sigma_{11} + w_2\sigma_{12} + \cdots + w_n\sigma_{1n}] &= \lambda\sigma_{1m} = E_1 - R_f \\
\lambda[w_1\sigma_{21} + w_2\sigma_{22} + \cdots + w_n\sigma_{2n}] &= \lambda\sigma_{2m} = E_2 - R_f \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
\lambda[w_1\sigma_{n1} + w_2\sigma_{n2} + \cdots + w_n\sigma_{nn}] &= \lambda\sigma_{nm} = E_n - R_f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1\sigma_{11} + a_2\sigma_{12} + \cdots + a_n\sigma_{1n} &= E_1 - R_f \qquad a_i = \lambda w_i \\
a_1\sigma_{21} + a_2\sigma_{22} + \cdots + a_n\sigma_{2n} &= E_2 - R_f \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_1\sigma_{n1} + a_2\sigma_{n2} + \cdots + a_n\sigma_{nn} &= E_n - R_f
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{\Omega a} = (E - R_P \cdot \mathbf{1})}$ 解出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $\quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} w_i = \lambda \quad \boxed{w_i = \frac{a_i}{\lambda}}$

給訂Ω和E，對應一個c，只要找到一組a，滿足 $\boxed{\mathbf{\Omega a} = (E - c \cdot \mathbf{1})}$

將a標準化變成加總為1(令w)，這個就是效率前緣上的組合。

無風險利率為5%

$$\sigma_m^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_i w_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{n}w_i\sum_{j=1}^{n}w_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{n}w_i Cov(R_i,R_m)=\sum_{i=1}^{n}w_i\sigma_{im}$$

$$E_m=\sum_{i=1}^{n}w_i E_i$$

	Ei	Ω 共變數矩陣		
Asset 1	0.14	0.0036	0.0009	0.0018
Asset 2	0.08	0.0009	0.0009	0.0018
Asset 3	0.20	0.0018	0.0018	0.0225

等本益比概念

$$\frac{E_m-R_f}{\sigma_m^2}=\frac{E_1-R_f}{\sigma_{1m}}=\cdots=\frac{E_N-R_f}{\sigma_{Nm}}=\lambda$$

$$E_i-R_f=\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}(E_m-R_f)=\beta_i(E_m-R_f)$$

$$0.0036a_1+0.0009a_2+0.0018a_3=0.14-0.05$$
$$0.0009a_1+0.0009a_2+0.0018a_3=0.08-0.05$$
$$0.0018a_1+0.0018a_2+0.0225a_3=0.20-0.05$$

$$a_1=\frac{1400}{63},a_2=\frac{100}{63},a_3=\frac{300}{63}\qquad \lambda=\frac{1800}{63}$$

$$w_1=\frac{14}{18},w_2=\frac{1}{18},w_3=\frac{3}{18}$$

SML是描繪個別資產(包括效率與無效率)的期望報酬與風險之間的關係，而描繪個別資產的風險就是風險，代表該資產的報酬受到大盤報酬變動之影響的程度。

CAPM所認為的風險為系統風險，也稱為beta 風險。 beta 值是指當市場報酬（即大盤）發生變動時，個別資產報酬率受到大盤影響而跟著變動的程度。Beta具有線性加總性質。所以的資產依照權重加總beta就等於大盤，大盤Beta就是1

$$\sum_{i=1}^{N}w_i\beta_i=1$$

市場組合，就是最高準Shape指標的組合，組合內的每個資產的Sharpe指標相同

$$\frac{E_m - R_f}{\sigma_m^2} = \frac{E_1 - R_f}{\sigma_{1m}} = \cdots = \frac{E_N - R_f}{\sigma_{Nm}} = \lambda$$

最小變異數組合(最小風險組合),mvp

$$\min_{\{w\}} \ \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2} w^T \Omega w$$

$$w'\mathbf{1} = 1,$$

$$\sigma_p^2 = w'\Omega w$$

$$\min_{\{\omega,\lambda\}} L = \frac{1}{2} w'\Omega w + \lambda\left(1 - w'\mathbf{1}\right),$$

邊際風險貢獻MRC= $0.5\dfrac{\partial \sigma_p^2}{\partial w} = \Omega w = \lambda \mathbf{1}$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \Omega w_p - \lambda \mathbf{1} = \underset{(N\times 1)}{\mathbf{0}},$$

$$\Rightarrow w_p = \lambda\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right).$$

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_i} = \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_j} = \lambda = \frac{1}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}}$$

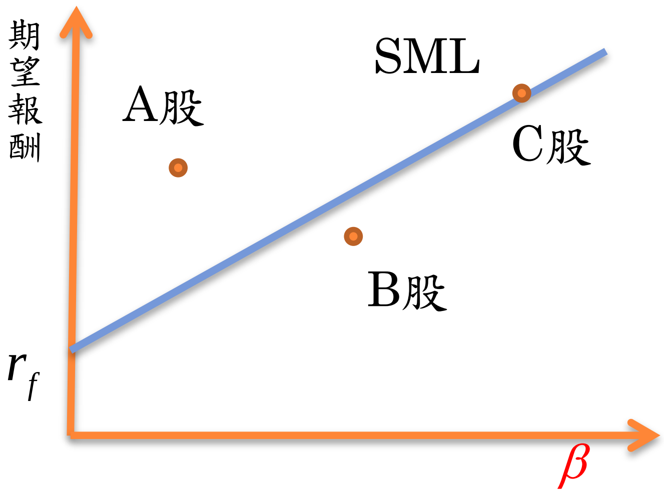
$$1 = \mathbf{1}' w_p = \lambda\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right).$$

$$MRC_i = MRC_j = \lambda$$

$$\Rightarrow w_{mvp} = \frac{\left(\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)}{\left(\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}\right)}.$$

最小風險組合，該組合內的每個資產對資產組合的邊際風險貢獻是一樣的,

證券市場線之投資應用



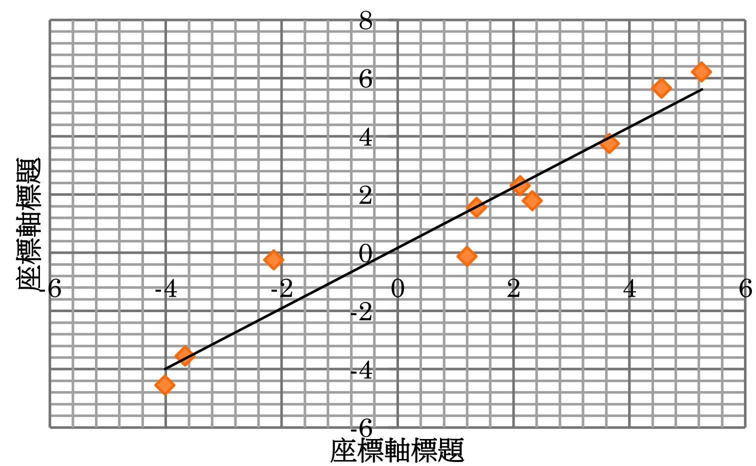
A股落在SML線上方，表示股價偏低(報酬率偏高)，建議買進；C股落在SML線下方，表示股價偏高(報酬率偏低)，建議賣出。

- β 值代表大盤上漲1%時，證券市場會同步上漲多少的百分點？漲得越多，beta值越大，代表該證券系統風險大。
- 當 β >1時，表示該證券的系統性風險超過大盤(平均)
- 當 β =1時，表示該證券的系統性風險等於大盤(平均)
- 當 β <1時，表示該證券的系統性風險小於大盤(平均)
- 景氣好時要買Beta大於1的股票，景氣差時要買Beta小於1的股票 。

估計投資組合β值

$$R_{it} = \alpha + \beta \cdot R_{mt} + \varepsilon_t$$

$$R_{it} = \ln(P_{it}) - \ln(P_{it-1}) = \ln(P_{it} / P_{it-1})$$



$$\beta = 1.04$$

投資組合績效之評估

	夏普指標 Sharpe Index	崔納指標 Treynor Index	詹森指標 Jensen Index
意義	每承擔一單位的標準差風險下，投資人可獲得的溢酬	每承擔一單位的 系統風險下，投資人可獲得的溢酬	投資組合報酬率超過由CAPM所計算出合理報酬率之差額
公式	$S_P = \dfrac{R_P - R_f}{\sigma_P}$	$T_P = \dfrac{R_P - R_f}{\beta_P}$	$J_P = R_P - \left[R_f + \beta(R_m - R_f)\right]$
判斷	越大績效越好	越大績效越好	越大績效越好

效率市場

效率市場假說係指資本是場所有的資訊已反應於價格上，投資人無法藉由收集資訊而獲得超額利潤。效率市場須存在有四點假設
(1)每個投資者能同時免費地獲得市場資訊，投資人對市場有相同預期。
(2)無交易成本、稅負與其他障礙
(3)每位投資人皆為理性的，追求利潤極大化，藉由分析、評價、交易，積極地投入市場。
(4)所有投資者為價格接受者

型態	定義	資訊反映程度	檢定方法
弱式效率市場	證券價格已充分反映所有過去或現存的資訊，包括過去的交易量、報酬率、價格走勢等。因此使用過去資訊來預測股價是無法獲得超額利潤，	技術分析無用	(1)隨機檢定 (2)濾嘴法則 (3)隨機趨勢檢定 (4)小型公司效應 (5)動量與反向策略
半強式效率市場	價格已反映了過去且目前所有公開的資訊。盈餘預測、股利、本益比、新產品研發、財務報表、專利權、政經事件等。無法用公開訊息獲得超額利潤	基本分析無用	(1)股票分割與股票股利之檢定 (2)新上市股檢定 (3)盈餘宣告之檢定
強式效率市場	價格已充分反映所有的資訊，包括公開與內線消息。任何人，即使是公司內部人員或董事也無法利用私人訊息賺取超額利潤	內線消息無用	(1)公司內部人員之檢定 (2)共同基金經理人之檢定