第三章　矩陣

§3−1 線性方程組與矩陣

把一群“數字”或代表數字的“文字”排成矩形的陣式（兩旁加括號圍之，視為一體）就是所謂的矩陣。比如：

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

都是矩陣，其他像“對數表”，“時刻表”…也是常見的矩陣。

“矩陣”與“向量”都是處理自然科學現象而發展出的數學工具。現今光從“資料的列表整理、分析”這個面向來看，矩陣也能與社會科學做緊密的結合，其應用越來越寬廣。本章將會學到矩陣的一些應用：

1. 應用矩陣解線性方程組。

2. 應用矩陣的運算，解決商業上的一些問題。

3. “二階方陣”可看成平面上的線性變換。

解“線性方程組”是代數學的基本課題，也是高中生應具備的基本功。許多“待定係數法”的問題，就需要用到解“線性方程組”。例如

(1) 試求通過三點（2，1），(5，10)，(−3，4）之圓方程式

$x^2+y^2+ax+by+c=0$。（找出待定係數 a，b，c）

(2) 在高一課程學過插值多項式，我們也可以用“待定係數法”求一個二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，使得 $f(2)=1$，$f(5)=10$，$f(-3)=4$。

在第二章中，剛學過解“三元線性方程組”，所用的方法就是消去法（代入消去法，加減消去法）。本節在“消去法”的根基上再引介“多元線性方程組”的系統解法 — **高斯消去法**，從而引進**矩陣**的概念。並透過矩陣的“**列運算**”求解“**多元線性方程組**”。

(甲)矩陣的基本認識

(1)矩陣的基本概念：

$$M=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 1 列} \\ \leftarrow \text{第 2 列} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第 } m \text{ 列} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{第} & \text{第} & & \text{第} \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \text{行} & \text{行} & & \text{行} \end{array} \end{array}$$

M 中每一個元素 a_{ij} 的“足碼”是“雙足碼”

(左碼「i」表“列數”，右碼「j」表“行數”)

例如：

a_{12} 是位在第 1 列，第 2 行的元素，a_{21} 是位在第 2 列，第 1 行的元素，

a_{ij} 是位在**第 i 列，第 j** 行的元素，

(2)矩陣的基本名詞：

(a)元：矩陣中列出來的每個數稱為矩陣的元(element)。

(b)列：同一水平線各元合稱此矩陣的**一列**(row)。

(c)行：同一鉛直線各元合稱此矩陣的一行(column)。
(d)位於第 i 列，第 j 行的元稱為 **(i,j)元**。
(e)當一個矩陣 M 有 n 列 m 行時，我們稱 M 為 **$n\times m$ 階的矩陣**。
(f)當一個矩陣 M 有 n 列 n 行時，我們稱 M 為 **n 階方陣**。

例如：$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 0\\ 5 & -4 & 2 & 3\\ 6 & 11 & -13 & 15\end{bmatrix}=[a_{ij}]_{3\times4}$，A 是一個 3×4 階的矩陣，$a_{21}=5$，$a_{32}=11$。

(3)矩陣的相等：
設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{p\times q}$，若 $m=p$，$n=q$，且對於任意 i 與 j 恆有 $a_{ij}=b_{ij}$，
則稱 A 和 B 相等，以 A=B 表示。

(練習1)已知矩陣 $B=[b_{ij}]_{3\times4}$，且每個元 $b_{ij}=2i-j$，求 B=？Ans：$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

(練習2)設方陣$\begin{bmatrix}2a-b & -1\\ 9 & c+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6c-5d\\ 3a+b & 19\end{bmatrix}$，試求 a,b,c,d。
Ans；$a=2,b=3,c=4,d=5$

(乙)高斯消去法與矩陣的列運算

◆ 線性方程組

數個（至少 2 個）方程式聯合在一起稱做方程組。聯立數個一次方程式，叫做一次方程組又稱**線性方程組**，在第二章曾學過“三個變數”的一次聯立方程式，簡稱“三元”線性方程組。如

＜線性方程組＞	＜幾何意涵＞
(A) $\begin{cases}x-y+z=5\\ 2x+y-3z=4\end{cases}$。	兩平面的“交線”。
(B) $\begin{cases}x+2y+z=3\\ 3x-y-2z=1\\ 2x+5y-3z=-10\end{cases}$。	三個平面的“交點”。
(C) $\begin{cases}x-2y+z=7\\ 4x+7y-2z=-5\\ 3x-5y+3z=20\\ x+3y-z=-4\end{cases}$。	四個平面的“交點”。

其中方程組(A)，(C)**方程式的個數與變數的個數不相等**，當然無法直接引用克拉瑪公式。
當方程組中方程式的個數很多時，應用“**高斯消去法**”就很簡便。

◆ 高斯消去法

(1)利用高斯消去法解線性方程組：

以一次方程組$\begin{cases}2x+3y-z=-2\\x-y+z=8\\3x-2y-9z=9\end{cases}$為例來說明，

(1°)為了計算方便起見，將 $2x+3y-z=-2$ 與 $x-y+z=8$ 兩式對調，

$$\begin{cases}2x+3y-z=-2\\x-y+z=8\\3x-2y-9z=9\end{cases}\xrightarrow{\text{對調前面兩式}}(\mathrm{L})：\begin{cases}x-y+z=8.....(1)\\2x+3y-z=-2.....(2)\\3x-2y-9z=9......(3)\end{cases}$$

利用(1)式消去(2)式與(3)式中 *x* 項的係數：

$$(\mathrm{L})：\begin{cases}x-y+z=8.....(1)\\2x+3y-z=-2.....(2)\\3x-2y-9z=9......(3)\end{cases}\xrightarrow{(1)\times-2+(2),(1)\times-3+(3)}\begin{cases}x-y+z=8\\0\cdot x+5y-3z=-18\\0\cdot x+y-12z=-15\end{cases}$$

(2°)再將上述方程組中第二式與第三式對調，

$$\begin{cases}x-y+z=8\\0\cdot x+5y-3z=-18\\0\cdot x+y-12z=-15\end{cases}\xrightarrow{\text{對調第二式與第三式}}(\mathrm{L}')：\begin{cases}x-y+z=8.....(1')\\0\cdot x+y-12z=-15.....(2')\\0\cdot x+5y-3z=-18.....(3')\end{cases}$$

在(L')中除了第一式外，其餘各式之中 *x* 項的係數都為 0。

(3°)利用$(2')$式消去 $(3')$式中的 *y* 項係數：

$$\begin{cases}x-y+z=8.....(1')\\0\cdot x+y-12z=-15.....(2')\\0\cdot x+5y-3z=-18.....(3')\end{cases}\xrightarrow{(2')\times-5+(3')}(\mathrm{L}'')：\begin{cases}x-y+z=8.....(1'')\\0\cdot x+y-12z=-15.....(2'')\\0\cdot x+0y+57z=57.....(3'')\end{cases}$$

在(L'')中$(3'')$式中 *x,y* 項的係數為 0，$(2'')$式中 *x* 項的係數為 0

將$(3'')\times\frac{1}{57}$，得$\begin{cases}x-y+z=8.....(1''')\\0\cdot x+y-12z=-15.....(2''')\\0\cdot x+0\cdot y+z=1.....(3''')\end{cases}$

由$(3''')$可解得 $z=1$，反代入$(2''')$解得 $y=-3$，再以 $z=1,y=-3$
得出 $x=4$，故一次方程組的解為 $x=4,y=-3,z=1$。

回顧前例中解一次方程組的過程，過程中進行了以下幾個動作，而且這些動作都不會改變原來一次方程組的解。

(1°)對調方程式的位置。
(2°)將某一方程式等號兩邊乘上一個不為 0 的常數。
(3°)將某一方程式乘上一個不為 0 的常數，加到另一個方程式。

並且一次用一個方程式去消去其它方程式中特定的未知數，最後可將一次方程

組轉化成$\begin{cases} x-y+z=8 \\ y-12z=-15 \\ z=1 \end{cases}$的形式。

一般而言，我們利用前面(1°)(2°)(3°)的動作逐步將一次方程組$\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x-y+z=8 \\ 3x-2y-9z=9 \end{cases}$

轉化成一次方程組$\begin{cases} x-y+z=8 \\ y-12z=-15 \\ z=1 \end{cases}$的方法，就稱為高斯消去法。

高斯消去法

(操作方法)	(說　　明)
$(A)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & ① \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & ② \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & ③ \end{cases}$	(i) 先選擇其中一個方程式，在運算過程中始終保持不變 (如 $a_1\neq 0$，可選第①式不變)
↓ 選擇①式，保持不變。消去②，③兩式中的 x。	
$(A_1)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & ① \\ b_2'y+c_2'z=d_2' & ④ \\ b_3'y+c_3'z=d_3' & ⑤ \end{cases}$	(ii) 利用①與②，①與③之線性組合，可消去②，③兩式中的變數 x 化成二元方程組 (如④，⑤兩式)。
↓ ①，④保持不變。利用“④與⑤”消去⑤式中的 y。	(iii) 若 $b_2'\neq 0$，可再選④式保持不變，利用④與⑤之線性組合可消去⑤中的變數 y，將⑤式化成一元線性方程式 (如⑥式)。
$(A_2)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & ① \\ b_2'y+c_2'z=d_2' & ④ \\ c_3''z=d_3'' & ⑥ \end{cases}$	(iv) 再由最後的方程組 (A_2)依序解出 z，y，x 的值。

一般而言，將方程組(A)經過列運算化簡為方程組(B)

$$(\mathrm{A})\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{列運算}} (\mathrm{B})\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ c_3''z=d_3'' \end{cases}$$

方程組(A)的解(x_0 , y_0 , z_0)顯然必為方程組(B)的解，而由於三種列運算是可逆的，即方程組(B)亦可經由列運算化成方程組(A)，所以方程組(B)的解(x_1 , y_1 , z_1)也是方程組(A)的解，故方程組(A)(B)的解是相同的。因此

任一個線性方程組(A)經「三種列運算」消去某些變數，化成易於求解的上三角模式(或下三角模式)之線性方程組(B)，則(A)與(B)的解完全相同。

而方程組(B)的解，一般而言比較容易用計算機來求解，這就是為何要用列運算化成方程組(B)的形式的原因。

(練習3) 設 $L_i(x, y, z)=a_i x+b_i y+c_i z$，試填 $\boxed{}$ 內的符號。

$$(A)\begin{cases} L_1(x, y, z)=d_1 & ① \\ L_2(x, y, z)=d_2 & ② \\ L_3(x, y, z)=d_3 & ③ \end{cases} \quad \underset{\boxed{}}{\overset{①\times r+②}{\rightleftarrows}}$$

$$(B)\begin{cases} L_1(x, y, z)=d_1 & ① \\ rL_1(x, y, z)+L_2(x, y, z)=rd_1+d_2 & ②' \\ L_3(x, y, z)=d_3 & ③ \end{cases}$$ 。

在第二章學過：不平行的兩個平面相交成一直線。試問空間兩條直線 $\ell_1:\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+3y+4z=8 \end{cases}$，與 $\ell_2:\begin{cases} 3x+2y-3z=7 \\ x+\ \ y+2z=2 \end{cases}$，是否相交？如果相交，又如何求 ℓ_1 與 ℓ_2 的交點。

一般的解法是先求出 ℓ_1，ℓ_2 的參數式，然後再判別它們是否有交點，求 ℓ_1，ℓ_2 的參數式也可以用高斯消去法。

[例題1] 試問：空間兩條直線

$$\ell_1:\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+3y+4z=8 \end{cases}。\qquad \ell_2:\begin{cases} 3x+2y-3z=7 \\ x+\ y+2z=2 \end{cases}。$$

是否相交，如果相交，請求交點坐標。

[分析]：ℓ_1 與 ℓ_2 有交點 $\Longleftrightarrow$ 線性方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+3y+4z=8 \\ 3x+2y-3z=7 \\ x+\ y+2z=2 \end{cases}$ 有解。

[解法]：

用高斯消去法解線性方程組

操作方法

$$(A)\begin{cases} x+2y+3z=5 & ① \\ x+3y+4z=8 & ② \\ 3x+2y-3z=7 & ③ \\ x+\ y+2z=2 & ④ \end{cases}$$

①式保持不變。
① ×(−1) 分別加到②，④。
① ×(−3) 加到③。

$$(A_1)\begin{cases} x+2y+\ \ 3z=5 & ① \\ \quad\ \ y+\ \ z=3 & ⑤ \\ -4y-12z=-8 & ⑥ \\ -\ y-\ \ z=-3 & ⑦ \end{cases}$$

①，⑤保持不變。
⑤ ×4 加到⑥。
⑤ ×1 加到⑦。

$$(A_2)\begin{cases} x+2y+3z=5 & ① \\ \quad\ \ y+\ z=3 & ⑤ \\ \quad -8z=4 & ⑧ \\ \quad\ \ 0\ =0 & ⑨ \end{cases}$$

由方程組 (A_2) 求得 $z=-\dfrac{1}{2}$，代入⑤得 $y=3-z=\dfrac{7}{2}$，

代入①得 $x=5-2y-3z=-\dfrac{1}{2}$，故直線 ℓ_1 與 ℓ_2 相交於一點 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2},-\dfrac{1}{2})$。

(練習4) 已知方程組(A)$\begin{cases} x+2y-z=10 \\ 2x+3y+3z=1 \\ 3x+4y+5z=4 \end{cases}\xrightarrow{\text{高斯消去法(列運算)}}(B)\begin{cases} x+2y-z=10 \\ y-5z=19 \\ -2z=12 \end{cases}$

試說明方程組(A)代表的幾何意涵。

Ans：三平面交於一點

(練習5) 試問空間兩條直線 ℓ_1：$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 3x+2y-3z=7 \end{cases}$。$\ell_2$：$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x+y-2z=4 \end{cases}$。

是否相交，若是，求它們的交點。(用高斯消去法)。

Ans：不相交

(練習6) 平面上四點 (－1，－3)，(6，4)，(2，6)，(7，1)，是否共圓？若是，求該圓的方程式。Ans：$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

◆ 矩陣與高斯消去法：

(1)矩陣的列運算：

我們使用高斯消去法求解一次方程組，在求解的過程中，運用(1°)(2°)(3°)的動作，將原方程式變形，整個過程產生的新方程組可以它的增廣矩陣來代替，如此就把方程組的變形過程轉成增廣矩陣的變形。

加減消去法

$$(A)\begin{cases} x+2y-z=10 & ① \\ 2x+3y+3z=1 & ② \\ 3x+4y+5z=4 & ③ \end{cases}$$

$\downarrow$ 保留①不變，①×(−2)+②，①×(−3)+③

$$(A_1)\begin{cases} x+2y-z=10 & ① \\ -y+5z=-19 & ④ \\ -2y+8z=-26 & ⑤ \end{cases}$$

$\downarrow$ ④×(−1)

$$(A_2)\begin{cases} x+2y-z=10 & ① \\ y-5z=19 & ⑥ \\ -2y+8z=-26 & ⑤ \end{cases}$$

$\downarrow$ 保留⑥不變，⑥×2+⑤

$$(A_3)\begin{cases} x+2y-z=10 & ① \\ y-5z=19 & ⑥ \\ -2z=12 & ⑦ \end{cases}$$

由⑦得 $z=-6$，

由⑥得 $y=19+5z=-11$，

由①得 $x=10-2y+z=26$。

分離係數法

$$(B)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right] \quad \times(-2) \quad \times(-3)$$

$\downarrow$

$$(B_1)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 5 & -19 \\ 0 & -2 & 8 & -26 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow\times(-1) \\ \\ \end{array}$$

$\downarrow$

$$(B_2)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 19 \\ 0 & -2 & 8 & -26 \end{array}\right] \quad \times 2$$

$\downarrow$

$$(B_3)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow\text{第一列} \\ \leftarrow\text{第二列} \\ \leftarrow\text{第三列} \end{array}$$

由第三列知：$-2z=12$，得 $z=-6$，

由第二列知：$y-5z=19$，得 $y=-11$，

由第一列知：$x+2y-z=10$，得 $x=26$。

上面分離係數法中，由方程組(A)之“變數的係數”所形成的矩形格式稱為**係數矩陣**，由“變數的係數及等號右邊的常數”所形成的矩形格式稱為**增廣矩陣**。即

方程組 $\longrightarrow$ 係數矩陣　增廣矩陣

$$(A)\begin{cases} 1x+2y-z=10 \\ 2x+3y+3z=1 \\ 3x+4y+5z=4 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right]。$$

在增廣矩陣中，為了區隔係數與常數項，可以在常數項的左方加一條鉛直線。

“方程組”與“增廣矩陣”之間構成一對一，即每一個方程組對應一個增廣矩陣；反之，每一個增廣矩陣對應一個方程組。

前面所述的(1°)(2°)(3°)的動作對應在矩陣上的變換，稱為**矩陣的基本列運算**：

矩陣的基本列運算：
(a)第 i 列與第 j 列對調，並用 $\mathbf{R}_{ij}$ 表示。
(b)將第 i 列乘上一個非零常數 r，並用 $r\mathbf{R}_i$ 表示。
(c)將第 i 列乘上一個常數 r 加到另一列，並用 $r\mathbf{R}_i+\mathbf{R}_j$ 表示。**(**第 i 列沒改變**)**

根據前面的說明：

任一個線性方程組(A)經「三種列運算」消去某些變數，化成易於求解的上三角模式(或下三角模式)之線性方程組(B)，則(A)與(B)的解完全相同。

因此

矩陣經過基本列運算之後，它們所代表的線性方程組之解完全相同。

[例題2] 下列那些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成$\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$？

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$。(2007 學科能力測驗) Ans：(1)(5)

[例題3] 試求一個二次函數 $f(x)$，使得 $f(-1)=2$，$f(2)=1$，$f(3)=3$。

[分析]：

在第一冊學過拉格朗日插值公式，可以依據所予條件，直接寫出二次函數。此處，我們用待定係數法。

[解法]：

設 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 是待定係數。

由題意 $f(-1)=2$，$f(2)=1$，$f(3)=3$，列出方程組

(A) $\begin{cases}1a-1b+c=2\\4a+2b+c=1\\9a+3b+c=3\end{cases}$，利用方程組(A)之增廣矩陣做列運算：

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\4&2&1&1\\9&3&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[(-9)R_1+R_3]{(-4)R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&6&-3&-7\\0&12&-8&-15\end{array}\right]\xrightarrow{(-2)R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&6&-3&-7\\0&0&-8&-1\end{array}\right]\to\text{方程組(B)}\begin{cases}a-b+c=2\\6b-3c=-7\\-2c=-1\end{cases}。$$

故 $c=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{6}(3c-7)=-\dfrac{11}{12}$， $a=2+b-c=\dfrac{7}{12}$，

即 $f(x)=\dfrac{7}{12}x^2-\dfrac{11}{12}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}(7x^2-11x+6)$。

[例題4] (1) 兩個平面 E_1：$x+2y+3z=4$ 與　E_2：$2x-y+7z=9$ 是否相交？
若是，求出它們的交線。
(2) 承(1)，三個平面 E_1，E_2 及 E_3：$x-5y+4z=7$，是否相交？
若是，求出它們的交點。

[分析]：
(1) E_1 與 E_2 之法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$ 與 $\overrightarrow{n_2}=(2,-1,7)$ 不平行，
故平面 E_1，E_2 必相交於一直線。
(2) 將 E_1 與 E_2 之交線（參數方程式）直接代入平面 E_3，再解一元方程式”。

[解法]：
(1) $\begin{cases} 1x+2y+3z=4 \\ 2x-\ \ y+7z=9 \end{cases}$ 之增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$

$\begin{cases} x+2y+3z=4 & ① \\ \quad -5y+\ z=1 & ② \end{cases}$

由②式，令 $y=t$（t 任意實數），則 $z=1+5y=1+5t$，
由①式，$x=4-2y-3z=4-2t-3(1+5t)=1-17t$。

故兩平面 E_1 與 E_2 之交線為 ℓ_{12}：$\begin{cases} x=1-17t \\ y=0+1t \\ z=1+5t，t\in R \end{cases}$。

(2) 將 E_1 與 E_2 交線 ℓ_{12} 的參數式代入平面 E_3 的方程式
$(1-17t)-5(t)+4(1+5t)=7$
$\Rightarrow -2t=2$　（t 有一解，此三個平面交於一個點）
$\Rightarrow t=-1$ 代回交線 ℓ_{12}，
得 $x=18$，$y=-1$，$z=-4$，
故三個平面 E_1，E_2，E_3 交於一點 $(18,-1,-4)$。

[例題5] 利用增廣矩陣的列運算，求方程組之解：

(1) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5x-3y+6z=6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y-z+2u=2 \\ 3x-y-z+u=1 \\ 7x-3z+4u=4 \\ x+9y-3z+7u=7 \end{cases}$

[解法]：
(1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 6 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ y-2z=-7 \end{cases}$，故令 $z=t$，得其解為 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-7+2t \\ z=t \end{cases}, t\in \mathrm{R}$，

所以方程組有無限多解。

$$(2)\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 7 & 0 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 9 & -3 & 7 & 7\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 2 & -5 & -5\\ 0 & -14 & 4 & -10 & -10\\ 0 & 7 & -2 & 5 & 5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & \frac{-3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{4}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -2 & 5 & 5\end{array}\right]$$

故令 $z=s,u=t$ 時，得其解為 $\begin{cases}x=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}s-\frac{4}{7}t\\ y=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}s-\frac{5}{7}t\\ z=s\\ u=t\end{cases}$ （s，$t\in\boldsymbol{R}$）。

[例題6] 求方程組之解：$\begin{cases}x+2y+4z+u=3\\ 2x-y+z+3u=7\\ -4x+7y+5z-7u=4\end{cases}$

[解法]：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 4 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 7\\ -4 & 7 & 5 & -7 & 4\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -5 & -7 & 1 & 1\\ 0 & 15 & 21 & -3 & 16\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -5 & -7 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19\end{array}\right]$$

此增廣矩陣相當於 $\begin{cases}x+2y+4z+u=3\\ -5y-7z+u=1\\ 0=19\end{cases}$ 不合理，故無解。

高斯消去法判斷三元一次方程組解的情形：

根據前面的例子，一般三元一次方程組(含三個方程式)的增廣矩陣經過列運算之後，最後所得的矩陣，可有下列三種情形：(*可以是任意數字)

(a)形如 $\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ 0 & b & * & *\\ 0 & 0 & c & *\end{bmatrix}$ 的矩陣，其中 a,b,c 都不為 0，，

此時原方程組恰有一組解。

(b)形如 $\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ 0 & b & * & *\\ 0 & 0 & 0 & d\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ 0 & 0 & b & *\\ 0 & 0 & 0 & d\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & *\\ 0 & 0 & 0 & d\end{bmatrix}$ 的矩陣，

其中 a,b,d 都不為 0，此時方程組無解。

(c)形如 $\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ 0 & b & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ 0 & 0 & b & *\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的矩陣，

其中 a,b 都不為 0，　此時方程式有無限多解。

使用矩陣的列運算來求解一次聯立方程組，雖然過程用人工來計算看起來並沒

有比較簡便，不過這是一個有程序的方法，因此適合用計算機來求解，尤其是一般的 n 元一次線性方程組(m 個方程式)，這也是發展並介紹高斯消去法(矩陣列運算)的主要目的。

[例題7] 試就實數 a 之值，討論方程組(L)的解，並說明所表三平面相交情形：

$$(L)\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2 \end{cases}$$

將方程組的增廣矩陣作列運算如下：

[解法]：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & (a^2-14) & (a+2) \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\times(-4)+R_3]{R_1\times(-3)+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & (a^2-2) & (a-14) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\times(-1)+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & (a^2-16) & (a-4) \end{array}\right]$$

(1)當 $a=4$ 時，方程組(L)變形為 $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ -7y+14z=-10 \\ 0=0 \end{cases}$ $\therefore$有無限多解，

解為 $x=\dfrac{8}{7}-t,\ y=\dfrac{10}{7}+2t,\ z=t$ ，$t\in R$，此時，三平面恰交一直線。

(2)當 $a=-4$ 時，由矩陣第三列知 $0=-8$。

$\therefore$無解，此時，三平面兩兩相交於一直線且三線不共點。

(3)當 $a\neq 4$ 且 $a\neq -4$ 時，方程組(L)變形為 $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ -7y+14z=-10 \\ (a^2-16)z=(a-4) \end{cases}$

解得 $x=\dfrac{8}{7}-\dfrac{1}{a+4}$ ，$y=\dfrac{10}{7}+\dfrac{2}{a+4}$ ，$z=\dfrac{1}{a+4}$ ，此時，三平面恰交一點。

[例題8] 設 a,b,c 為實數，考慮線性方程組 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$，試求：

(1)若方程組恰有一組解，則 a,b,c 的條件為何？
(2)若方程組無解，則 a,b,c 的條件為何？
(3)若方程組無限多解，則 a,b,c 的條件為何？
Ans：(1)$-11a+3b+7\neq0$ (2) $-11a+3b+7=0$，$c-14\neq0$ (3) $-11a+3b+7=0$，$c-14=0$

(練習7) 利用矩陣的列運算，求聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x-y-4z=5 \\ 5x-3y-9z=13 \end{cases}$ 的解。

Ans：$x=2+3t, y=-1+2t, z=t$，t 為實數

(練習8) 方程組 $\begin{cases} 3x-2y=9a \\ 4x+y=5a+3 \\ 5x+4y=4a \end{cases}$ 恰有一組解，試求 a 的值與方程組的解。

Ans：$a=2$，$x=4, y=-3$

(練習9) 利用增廣矩陣的列運算，求下列方程組的解。

(1) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5x-3y+6z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-4y+2z=0 \\ 2x-8y+4z=-1 \\ -3x+8y+z=2 \end{cases}$

Ans：(1) $x=-3, y=-7+2t, z=t$ (2)無解

(練習10) 試求 a 的值使方程組 $\begin{cases} 3x+y+z=a \\ x+3y-3z=1+a \\ x-y+2z=1-a \end{cases}$ 有解。Ans：$a=\frac{3}{2}$

(練習11) 求方程組之解：$\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x+2y+z=7 \\ x+5y+4z=16 \\ 4x+2y-2z=10 \end{cases}$

[答案]：$x=t+1$，$y=-t+3$，$z=t$，$t\in R$

綜合練習

(1) 用高斯消去法解下列線性方程組，並說明各方程組對應的幾何意涵。

(a) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+3y+4z=7 \\ 3x-4y+5z=17 \end{cases}$。(b) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+3y+4z=7 \\ x+3y+5z=8 \end{cases}$。(c) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+3y+4z=7 \\ 3x-y-5z=4 \end{cases}$。

(2) 下列哪些增廣矩陣所代表的一次聯立方程組恰有一組解？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

(3) 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(4) 已知矩陣$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$經過列運算，得$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$，

試求 a,b 之值。

(5) 對矩陣$\begin{pmatrix} 4 & 9 & a \\ 3 & 7 & b \end{pmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，則$(a,b)=$_______。

(2009 指定甲)

(6) 利用增廣矩陣的列運算解下列方程組：

(a) $\begin{cases} x+2y-z+u=7 \\ 2x-y+3z-u=4 \\ 3x-4y+7z-3u=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$

(7) 試找出方程組$\begin{cases} x+y+2z=a \\ -2x-z=b \\ x+3y+5z=c \end{cases}$ 有解的充要條件。

(8) 在平面上，下列四點是否在同一個圓上？

$A(-4，2)$，$B(1，-3)$，$C(4，6)$，$D(-3，5)$。

如果是共圓，求出此圓的方程式 $x^2+y^2+ax+by+c=0$。

(9) 用“待定係數法”，找出一個二次函數 $f(x)$，使其圖形通過

$A(1，-2)$，$B(-1，22)$，$C(2，-5)$ 三點。

(10) 試討論 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$ 之解。

綜合練習解答

(1) (a)三平面交於一點$(1,-1,2)$ (b)三平面交於一直線$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-2t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為實數

(c)三平面沒交點

(2) (1)(2)(3)

(3) (2)

(4) $a=2$、$b=1$

(5) $(13,10)$

(6) (a)$(x,y,z)=(-s+\frac{t}{5}+3,s-\frac{3}{5}t+2,s,t)$ (b)$(x,y,z)=(1,1,2)$

(7) $3a+b=c$

(8) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

(9) $f(x)=3x^2-12x+7$

(10) (1) $a\neq 2$ 且 $a\neq -3$，唯一解，$(x,y,z)=(1,\frac{1}{a+3},\frac{1}{a+3})$；

(2)$a=-3$，無解；

(3)$a=2$，無限多解，解為 $(5t,1-4t,t),t\in R$。