

主 題 5 因式分解進階題

【觀念一】立方和

$$(1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= \underline{\hspace{10em}}$$

$$(2) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$
$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$
$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

【觀念二】立方差

$$(1) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$= \underline{\hspace{10em}}$$

$$(2) a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$
$$= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$
$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

【觀念三】 $a^n - b^n$ 分解

$$(1) a^2 - b^2 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$(2) a^3 - b^3 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$(3) a^4 - b^4 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$(4) a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$(5) a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

$$(6) a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

《推論》

$$(1) x^2 - 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(2) x^3 - 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(3) x^4 - 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(4) x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$(5) x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$(6) x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

【觀念四】 $a^n + b^n$ 分解

$a^n + b^n$ 必須在 n 為 才可分解，在 n 為 不可分解

$$(1) a^3 + b^3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(2) a^5 + b^5 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(3) a^7 + b^7 = \underline{\hspace{4cm}}$$

《推論》

$$(1) x^3 + 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(2) x^5 + 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(3) x^7 + 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

【觀念五】 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 分解

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c) \left[(a+b+c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab \right]$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$